

非線形振動系におけるカオス的挙動と
その特徴抽出について

平成8年2月

吉田勝俊

非線形振動系におけるカオス的挙動と その特徴抽出について

第1章 序論	1
1.1 研究の目的	1
1.2 論文の構成	4
第2章 カオス的挙動の概要とそれに対応する問題	8
2.1 はじめに	8
2.2 カオス的挙動	10
2.2.1 不規則性	10
2.2.2 多様性	11
2.2.3 自己相似性とストレンジアトラクタ	12
2.3 カオスの特徴抽出	13
2.3.1 フォーコフ法	13
2.3.2 ノンコフォフ法	14
2.3.3 フォーコフ法と非コフォフ法の比較	15
2.3.4 リアプノフ法	16
2.3.5 リアプノフ法の適用範囲	17
2.3.6 カオスの計算力学	18
2.4 カオスシステムの同定	19
2.4.1 同定問題	19
2.4.2 カオス的挙動の同定問題	20
2.5 非線形振動系におけるカオス	21
2.6 結論	21
2.6.1 今後の課題	21
2.6.2 カオスシステムでの非線形振動の同定	22
2.6.3 同定問題の解決法と今後の展望	23

平成 8 年 2 月

吉田 勝 俊

目次

	頁
第1章 緒言	1
1.1 カオスとその工学的応用	1
1.2 研究の目的	3
1.3 論文の構成	4
第2章 カオスの挙動の特質とそれに付随する問題	5
2.1 はじめに	5
2.2 カオスの挙動	5
2.2.1 不規則性	5
2.2.2 多様性	8
2.2.3 ポアンカレ写像とストレンジアトラクタ	8
2.3 カオスの特徴抽出	11
2.3.1 メルニコフ法	11
2.3.2 メルニコフ法の適用限界	15
2.3.3 フラクタル次元	17
2.3.4 リアプノフ指数	18
2.3.5 リアプノフ指数の適用限界	20
2.3.6 カオスの統計力学	22
2.4 カオスシステムの同定	24
2.4.1 遅延座標	24
2.4.2 カオスの挙動の局所時間予測	24
2.5 機械振動系におけるカオス	26
2.6 考察	30
2.6.1 考察の立場	30
2.6.2 カオスシステムのモデリング誤差の評価	30
2.6.3 分岐現象の予測および特徴抽出	31

第3章	カオスの同期現象とシステム同定問題	34
3.1	はじめに	34
3.2	カオスの同期現象	34
3.3	同期カオス規範	36
3.4	同期カオス規範によるモデリング誤差の評価	38
3.4.1	一自由度非線形振動系から生成される同期システム	38
3.4.2	カオス的挙動とそのモデルから生成される同期システム	39
3.5	数値例	40
3.5.1	力学モデル及びそれ上のカオス挙動	41
3.5.2	システムパラメータの誤差	43
3.5.3	非線形特性の誤差	53
3.5.4	2種類の誤差が同時に生じた場合	56
3.6	まとめ	60
第4章	カオスの特徴抽出	61
4.1	はじめに	61
4.2	局所的拡大率	62
4.2.1	局所的拡大率	62
4.2.2	運動方程式が既知である場合	62
4.2.3	運動方程式が未知である場合	64
4.3	統計力学的手法	67
4.3.1	粗視的拡大率	67
4.3.2	動的構造関数	67
4.3.3	リアプノフ指数による結果との比較	69
4.4	バースト分岐現象の特徴抽出	74
4.4.1	機械系力学モデル上のバースト分岐現象	74
4.4.2	バースト分岐現象の動的構造関数による表現	76
4.5	数値例	82
4.5.1	運動方程式が既知である場合	82
4.5.2	2次元時系列からの特徴抽出	87

目次

4.5.3	1次元時系列からの特徴抽出	92
4.6	統計力学的手法に対する装置ノイズの影響	99
4.6.1	装置ノイズを含むデータ	99
4.6.2	装置ノイズの影響	107
4.7	まとめ	121
 第5章 カオスの特徴抽出に関する実験		122
5.1	はじめに	122
5.2	実験装置	122
5.2.1	実験装置の構成	122
5.2.2	力学モデル	126
5.3	実験結果	128
5.3.1	バースト分岐現象	128
5.3.2	統計力学的手法によるバースト分岐の特徴抽出	139
5.4	まとめ	143
 第6章 結言		144
 参考文献		147
 謝辞		151

第1章

緒言

1.1 カオスとその工学的応用

決定論的なシステムが、不規則かつ予測不可能な挙動を生じ得ることが、種々の実在系上に確認されて久しい。20世紀初頭には異常なノイズと規定されていたカオスの挙動も、現在では、純粋な力学的挙動として認知されるに至った。

カオスの発見を科学の立場から見れば、これまで確率論の範疇にあった不規則挙動に対して、力学的な視点を導入するための根拠が実例とともに提示されたことを意味する。このことにより、未知の不規則挙動の理解に向けて、従来の確率論的な視点とともに、力学的な視pointsの導入が可能になった。力学的な再帰写像からベルヌーイ試行と同等のランダム性の存在を証明した試みにみられるように、明らかにカオスの発見は、力学と確率論の相互作用を助長しており、これによって生み出される新たな科学的知見への期待が高まる。

一方で、工学の立場からこのようなカオスを見れば、着目すべき点は、カオスシステムの持つ多様性にあると思われる。

カオスの挙動を発生するような非線形システムは、システムの置かれた条件によって多彩な振舞いを見せる。そこには、幾つかのタイプの周期的挙動と幾つかのタイプのカオスの挙動が混在する。このようなカオスの多様性を応用すれば、システムの構造を大幅に変更することなく、システムの挙動に多様性を持たせることが可能になる。その実例はカオス・ニューラルネットワークによる記憶のモデル化の試みのなかに見ることができ、そこでは、記憶と記憶の検索をそれぞれ、システムの周期的挙動とカオスの挙動として捉え、脳の連想記憶に類似する状況を人工的に生成することに成功している。このようなカオスの性質を積極的に利用した工学の将来像には極めて興味深いものがある。

しかしながら、本研究の最終目標でもある機械装置上のカオスの取り扱いに関しては、現状において、カオスの特質を積極的に利用したような応用例は、著者の知るかぎり存

在していない。

機械工学におけるこのような状況が、機械工学においてカオスを考慮することが必要であることを意味しないことは、機械装置上にカオスが存在することを確認した種々の報告例から明らかである。

カオスの応用例が機械工学において稀なことの主な理由は、機械振動系のカオスに関する基礎的なデータの中に、カオスの積極的な応用研究を喚起するようなものが、十分に存在していない点にあると思われる。

先に機械装置に発生するカオスに関する報告の存在について触れたが、これらの報告には、著者の見る限り、工学的意味付けの明確な主張は含まれていない。現状の機械工学におけるカオスの取り扱いの多くは、単に機械装置上のカオ斯的挙動の存在を確認するのみであったり⁽³²⁾⁽³⁵⁾、あるいはカオスに関するある種の指標を装置上の実挙動に対して算出した例も存在するが⁽³¹⁾⁽³³⁾⁽³⁴⁾⁽³⁶⁾、この場合も単にその数値に基いて、得られた挙動がカオスであることを述べるに留まるものが殆どであるように見受けられる。

このような機械工学における現状は、機械装置上のカオスを未だ適切に観察できていないことを意味しているのではないか。すなわち、カオスの積極的応用を図る以前の段階として、機械装置上に発生したカオスを、いわば受身の立場で観察する際に、来るべきカオスの積極的応用に役立つような情報が、未だ十分には抽出されていないように見受けられる。現在の機械工学におけるカオスの研究がそうであるように、実在系に何如なるカオスが生じ得るかというような基礎的なデータを蓄積するような段階では、対象のシステムの数式表現が不要であるような、データ解析的な手法が有効である。

また一方で、将来的なカオスの積極的応用を図る上では、カオスシステムの出来るだけ正確な数式表現を得ることが必要な場合を生じるであろう。すなわち、現象の観察の段階から一步進んで、カオスシステムのモデル同定や、カオス制御系のシンセシスの問題を考える場合、実際に生じるカオ斯的挙動とその力学モデルとの関係を詳細に議論する必要性が生じる。

このような、現状および将来的な問題の解決に向けては、従来から二つの立場

- A. カオスシステムのできるだけ正確な力学モデルを得るための手法の構築。
- B. カオスのデータ解析手法の構築。

が見られるが、現状では、それぞれに対して以下の未解決な問題が存在する。

- A. カオ斯的挙動の力学モデルの精度を定量化可能な指標が存在しない。

B. すでに実用段階にある手法も存在するが、結果の解釈が不十分で工学的な意味付けが不明瞭である。

これらの問題の解消が、機械工学のみならず、実在系を扱う工学一般における、将来的なカオスの積極的応用を導くものとする。

1.2 研究の目的

以上の議論を踏まえて、本論文では以下の2点の達成を目的とする。

- カオスの挙動の力学構造が特定されたときに最小となるような指標を構築すること。
- カオスの分岐現象を、カオスの挙動の時系列のみから特徴づけ可能な手法を構築し、その手法を機械装置上に発生する現実のカオス分岐現象に適用すること。

第一点において、カオスシステムのできるだけ正確な数式表現を得ようとする立場への寄与を期し、第二点においては、実在系に生じるカオスを適切に観察するための具体的手法を実例をもって提示する。

1.3 論文の構成

まず、第2章においては、本論文における議論の前提として、カオスの挙動の特質とそれに付随する問題について述べる。そこではまず、様々な問題を生む原因となるカオスの不規則性と多様性についての基礎的な事実を明らかにする。次に、カオスの特質の定量化に関する従来手法を概観し、各手法の有する特徴および問題点について明らかにする。これに基づいて、カオスの研究の現状が機械工学の分野においてどの程度反映されているかを述べる。最後に以上に述べた現状を、カオスの挙動の、モデリング誤差の評価問題および分岐現象の特徴抽出の2つの観点から考察し、第3章以降の議論の基本的動機を明らかにする。

第3章ではカオスシステムのモデリング誤差の評価問題を論じる。そのためにカオスの同期現象を応用し、同期カオス規範という新しい指標を定義する。これを用いて、システムパラメータにおけるモデリング誤差、非線形特性におけるモデリング誤差の評価を行なう。

第4章では、カオスの分岐現象の特徴抽出を時系列から行うための具体的な方法について議論する。そのために、リアプノフ指数の局所時間的なゆらぎに着目した統計力学を用いる。まず、リアプノフ指数の使用によって限界を生じたカオス分岐の特徴抽出に対して、統計力学による特徴抽出が有効である実例を示し、これを踏まえて、統計力学の特徴抽出結果の簡便な利用法を統計力学的手法として提案する。この統計力学的手法の具体的な適用対象として、周期性の強いカオスとその周期性を崩壊するカオス分岐であるバースト分岐を取り上げ、最終的には、カオスの振動の1次元時系列が既知であれば、統計力学的手法が有効であることを数値的に示す。最後に、より現実的な状況として、決定論的カオスの観測時に装置ノイズが加法的に加わった場合を考え、これによって統計力学的手法による解析結果が如何なる影響を受けるかについて議論する。

第5章では、第4章で有効性を確認した統計力学的手法を用いて、機械装置上に発生するカオス分岐現象の特徴抽出を行い、得られた結果に対して工学的な意味の明確な解釈を試み、カオスのデータ解析に関する従来手法の限界の解消を試みる。

以上の結果を第6章においてまとめ、結言とする。

第 2 章

カオスの挙動の特質とそれに付随する問題

2.1 はじめに

本章では、第 3 章以降における具体的な議論の前提について述べる。

まず、第 2.2 節において、カオスの挙動の特質を明らかにする。第 2.3 節では、この特質の定量化に関する従来手法を概観し、手法の有する特徴および問題点について明らかにする。さらに、第 2.4 節においては、カオスシステムのモデリング誤差の評価問題を述べる前提として、カオスシステムの同定問題の概要を述べる。また、第 2.5 節では、以上で明らかにしたカオスに関する研究の現状が、機械工学の分野においてどの程度反映しているかを述べる。

以上に基つき、第 2.6 節においては、第 3 章以降における具体的な議論の必要性を明らかにする。

2.2 カオスの挙動

2.2.1 不規則性

カオス力学系の例として、次式で定義されるロジスティック写像を考える。

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (2.1)$$

このロジスティック写像から $a = 4$ の条件で生成した点列を図 2.1 に示す。図中の二つの点列は式 (2.1) で与えられる同一の力学構造から生じたものであるが、初期値が僅かに異なる。それぞれの初期値は、上の点列に対して $x_0 = 0.6$ 、下の点列に対して $x_0 = 0.61$ である。この二つの点列の挙動から分かることは、たとえ同一の力学構造が与えられていても、そのシステムに同一の初期値を与えない限り、同一の挙動は生じないということである。このようなカオスの性質を初期値鋭敏依存性と呼ぶ。カオスの初期値鋭敏依存性は、挙動の不規則性および非再現性を生む。その機構は以下のように要約できる。

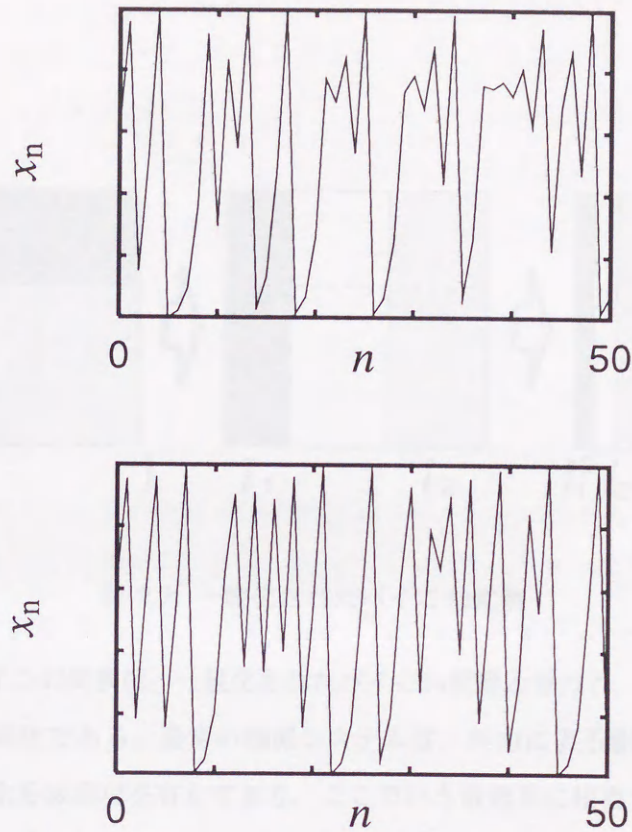


図 2.1: 初期値の僅かに異なるロジスティック写像の点列

まず、僅かな初期値の誤差が、指数関数のオーダで拡大する。この誤差の拡大は、その規模が挙動の主要な振幅程度に達すると、システムの非線形性により飽和する。この飽和の過程は、折畳みの構造を伴って生じ、これを繰り返すことによって、有限時間後にシステムは実質上初期値の記憶を失なう。

このような、指数関数的な誤差の拡大と、折畳みによる拡大の飽和の機構は、次式で定義されるパイコね変換によってモデル化される。

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \begin{cases} l_1 x_n & (y_n < P_1) \\ 1 + l_2(x_n - 1) & (y_n > P_1) \end{cases} \\
 y_{n+1} &= \begin{cases} y_n/P_1 & (y_n < P_1) \\ (y_n - P_1)/(1 - P_1) & (y_n > P_1) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

この写像は、図 2.2 に示すように、縦方向が $1/P_1$ 倍および $1/P_2$ 倍、横方向が l_1 倍および l_2 倍されながら、全体として体積が減少していくような写像である。

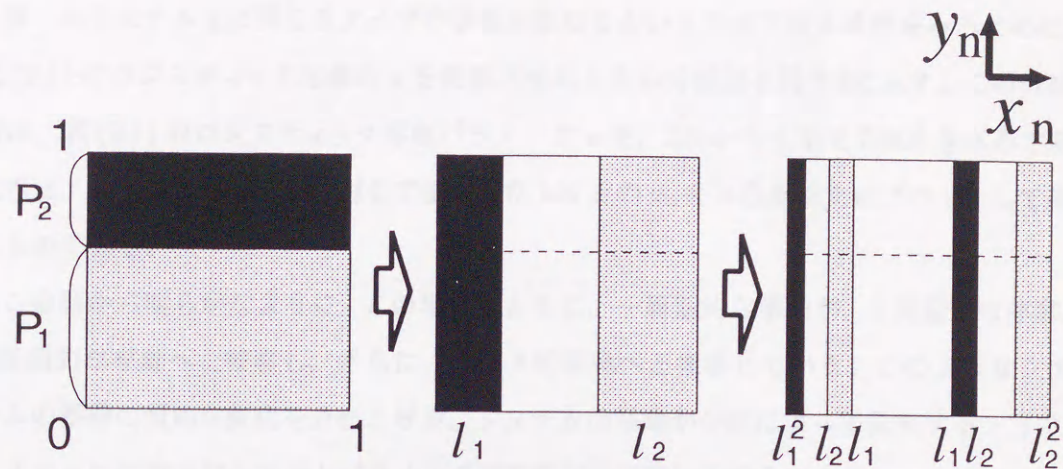


図 2.2: 一般化されたパイこね変換

ここで示したパイこね変換は、一般化されたパイこね変換と呼ばれ、一般的な散逸系に生じるカオスの単純化である。通常の機械システムは、外力による駆動項と、クーロン摩擦やダンパ等による減衰項を有しており、ここでいう散逸系に相当する。したがって、図 2.2 に示す機構は、機械装置上に生じるカオスの性質を単純化したものと考えられる。

さて、この変換によって不規則性が生じる理由は、例えば x_n の値を二値化したときの極端な場合を考えれば明らかになる。すなわち $x_n \in [0, P_1)$ なる場合と $x_n \in [P_1, P_2]$ なる場合の二通りの場合を考える。今 x_n の初期値に関して、どちらか一方の区間に存在することのみが既知であるとしよう。この場合、変換後 x_n がどちらの領域に存在するかを、この二値化された初期値の情報のみから予測することは不可能である。この予測を可能とするためには、 $[0, P_1)$ と $[P_1, P_2]$ のそれぞれの区間をさらに細分化して初期値の情報を取得しなければならない。この単純な例から、初期値が有限の精度で既知な場合、それ以後の挙動が予測不可能となるような有限の時間が存在することが分かる。初期値が実数として既知ならば、この変換は決定論的であるが、現実の問題を考えると、実数としての初期値を知ることは不可能なので、パイこね変換の構造を有するカオスの挙動は、実質的に予測不可能性を持つ。このことにより、パイこね変換による点列は、ベルヌーイ試行と同等の不規則性を示すようになる。

カオスの挙動の構造に関してこの変換がモデル化しているのは、カオスの挙動に内在する、折畳み構造と引き延し構造の混在である。このパイこね変換では、 x_n 方向の縮小と、 y_n 方向の拡大として、この性質を表現している。

2.2.2 多様性

同一のシステム上に異なるタイプの挙動が生じるというカオスの多様性をみるために、式(2.1)のロジスティック写像の a を変化させたときの分岐図を図2.3に示す。この分岐図は、式(2.1)のロジスティック写像パラメータ a を、2.5から4まで0.005きざみで変化させ、それぞれの a の値に対して生成した100点の x_n を a の垂線上にプロットして得たものである。

この図から明らかなように、 a の増大とともに、一周期的な挙動が、2周期的な挙動、4周期的な挙動へと推移し、さらに、カオスの挙動へと推移している。このようなシステムの挙動の質的な変化を分岐と呼ぶ。システムの挙動が分岐によって急変する一方で、システムには微小なシステムパラメータの変化が生じているのみである。

このような分岐現象を理解することは、事前にシステムの挙動を熟知する必要がある、システムの設計・制御を考える上で必要不可欠である。この中で、周期運動からカオスへの分岐点を知ることは、システムに与えられた条件の僅かな変化が、システムの挙動を安定な挙動から不規則で不安定な挙動に変化させる条件を知ることにつながる。したがって、カオスに起因する装置の異常振動やそれに伴う装置の破壊等のトラブルを事前に予測し、必要ならばそれを避ける設計・制御を行なうためには、周期運動からカオスへの分岐を生じる臨界パラメータを特定することが必要である。また一方で、カオスから別のタイプのカオスへの分岐現象、いわゆるカオス分岐を生じる臨界パラメータを特定することは、カオスの積極的な工学的応用を計る上で有益である。質的に異なる各々のカオスの挙動を、各モードとして、コントロールパラメータの値を変化させることによって、これらのモード間を自在に推移させるような制御を行なうためには、システムのカオス分岐に対する事前の十分な理解が必要不可欠である。

2.2.3 ポアンカレ写像とストレンジアトラクタ

式(2.1)のような単純な離散写像を例としてみたカオスの挙動の不規則性と多様性は、機械システムなどの工学的に問題となるような、連続時間システム上のカオスの挙動においても同様に現われる。このような連続系に生じるカオスの挙動は、通常、ポアンカレ写像と呼ばれる離散化を経た後の、離散的点列として取り扱われる。本研究の考察対象は連続時間系のカオスであるので、このポアンカレ写像による離散化の手法の導入は不可欠である。特に本研究では、周期外力を受ける一自由度の非線形振動系を取り扱うので、それに対するポアンカレ写像を以下のように導入する。

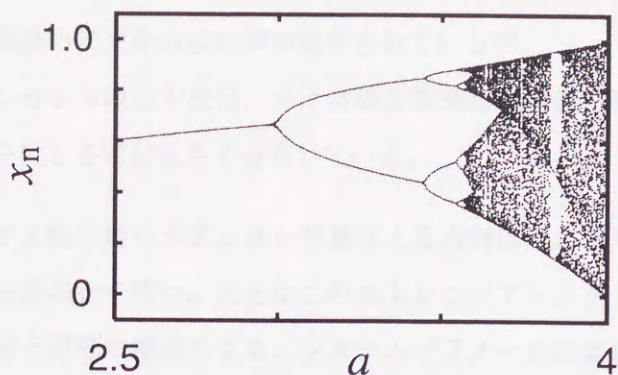


図 2.3: 分岐図

いま、次式の一自由度非線形振動系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

ここに f は t に関する周期 τ の周期関数とする。

ここで、 $x_0 = (x_1(0), x_2(0))$ を初期値に持つ式 (2.3) の解を $x(t) = X(t, x_0)$ としたとき、相平面 \mathbf{R}^2 を自分自身に写す次式の写像 T をポアンカレ写像という。

$$\left. \begin{aligned} T : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ x_0 &\rightarrow x_1 = x(\tau) = X(\tau, x_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

このポアンカレ写像による点列は、具体的には、 x_1 - x_2 平面上の解軌道 $(x_1(t), x_2(t))$ を、時間間隔 τ でストロボプロットすることによって得られる。このことから、このポアンカレ写像による点列をポアンカレプロットと呼ぶ場合がある。

このような離散化を行なうことの利点としては、

- 解の漸近的性質を捉えるのが容易になる。
- 解空間を張る独立変数を減らす。
- 得られた離散的な点列の推移は差分方程式によって記述され、連続時間の解作用素を直接取り扱う必要がなくなる。
- 連続な解軌道に関する大部分の情報を無視するので、扱うデータ量が激減する。

などの点が挙げられる。工学的には、Otto らによる OGY 法⁽¹⁾ と呼ばれる、微小パラメータ変動によるカオスの挙動の周期化の技術が、まさにこの中の 4 点目の利点を活か

したものであり、連続時間系の挙動のポアンカレ写像のみに着目することで、リアルタイムでのカオスの挙動の安定化の成功例が報告されている⁽²⁾。

このようにポアンカレ写像の手法は、カオスの基礎理論の発展に寄与するばかりでなく、工学的な意義を生じる可能性を十分有している。

連続時間系のカオスの挙動のポアンカレ写像による点列は、ストレンジアトラクタと呼ばれる時間的な極限集合を持つ。まさにこのストレンジアトラクタを生成する非線形写像はパイコネ変換と同等の構造をもち、システムパラメータの変化に伴うカオスの挙動の分岐は、このストレンジアトラクタの形状の変化として現われる。このストレンジアトラクタの存在によって、一方でベルヌーイ試行と同等なランダム性を有するカオスの、力学的な取り扱いが可能となっている。

このことから、現在までに構築されたカオス理論の多くは、このストレンジアトラクタの構造の理解を主要課題としている。

2.3 カオスの特徴抽出

本節では、第 2.2 節でみた不規則性・多様性を有するカオスの挙動の特徴を定量化するための、従来手法を概観する。まず、カオス振動系の運動方程式に基づく解析的な手法であるメルニコフ法とその限界を述べる。次にカオスの特徴をデータ解析的な立場から特徴付ける指標として、カオスの折畳みと引き延しの構造のそれぞれに対応した巨視量であるフラクタル次元とリアプノフ指数について触れ、特にリアプノフ指数に関しては、分岐現象の特徴抽出を行なう際の適用限界を示す。さらにこれらの巨視量の局所的なゆらぎに着目した大域的スペクトラムの方法と動的構造関数による方法について概観する。

2.3.1 メルニコフ法

システムパラメータの微小な変化に伴って、システムが急激に周期的挙動からカオスの挙動に分岐する可能性を有するか否かを見積るために、従来からメルニコフ法が利用されている。このメルニコフ法は、本来、カオスの存在証明のために創案された解析手法であるが、これによって得られるカオスの存在を示す条件式が、システムパラメータの代数方程式として得られることから、これを用いてカオスを発生するシステムパラメータの値を見積ることができる。

メルニコフ法によるカオスの存在証明は、カオスの挙動の発生が、周期解の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差する横断的ホモクリニック軌道の存在に起因しているという、Smale-Birkhoff のホモクリニック定理に基づくものである。メルニコフ法では、この横断的ホモクリニック軌道の存在条件を摂動法によって導く。この存在条件は、メルニコフ関数が零値をとることで表現される。このメルニコフ関数の導出手順の概要を以下に示す。

簡単のため周期外力を受ける一自由度の非線形振動系を考え、これを以下のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) + \varepsilon g_1(x, y, t) \\ \dot{y} &= f_2(x, y) + \varepsilon g_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで、 $\varepsilon = 0$ のとき式 (2.5) は保存系となる。

まず、 $\varepsilon = 0$ の保存系を考え、このときのハミルトニアン H を次式から求める。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} &= f_2(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

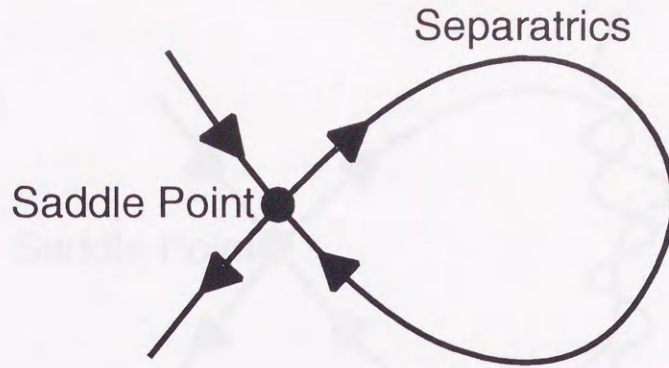


図 2.4: ハミルトン系のセパトラックス

このハミルトニアン $H = (\text{一定})$ の条件からハミルトン系の解軌道を求め、この中から鞍点を通る軌道を選ぶ。この軌道をセパトラックスと呼び、これを $(x_0(t), x_1(t))$ と表記する。ハミルトン系においてはセパトラックス (分離子) を横断的に横切る軌道は存在しない。このハミルトン系のセパトラックスの模式図を図 2.4 に示す。

この保存系のセパトラックスを用いて、メルニコフ関数の一次近似は次式で定義される。

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(x_0(t), x_1(t))g_2(x_0(t), x_1(t), t+t_0) - f_2(x_0(t), x_1(t))g_1(x_0(t), x_1(t), t+t_0)] dt \quad (2.7)$$

ここに t_0 は外力の任意の位相を表わす。

$\varepsilon \neq 0$ のとき、セパトラックスは安定な軌道と不安定な軌道の二つの軌道に分離し、図 2.5 に示すように、互いに横断的に交差するようになる。これがカオス発生の要因とされている。

メルニコフ関数 M は、図 2.6 に示すように、セパトラックスが分離した二つの軌道の間の最短距離に対応する値を与える。このメルニコフ関数を用いれば、式 (2.5) のような非線形振動系にカオスが存在するための条件は、以下のように表現される。

- $M(t_0) = 0$
- $\partial M / \partial t_0 \neq 0$

第一の条件は、分離したセパトラックスの距離が零であることを表わし、第二の条件は、鞍点における交差は考慮しないことを表わしている。この二つの条件を満足すれば、横断的に交差するセパトラックスの存在が証明され、これによってカオスの挙動の存在が

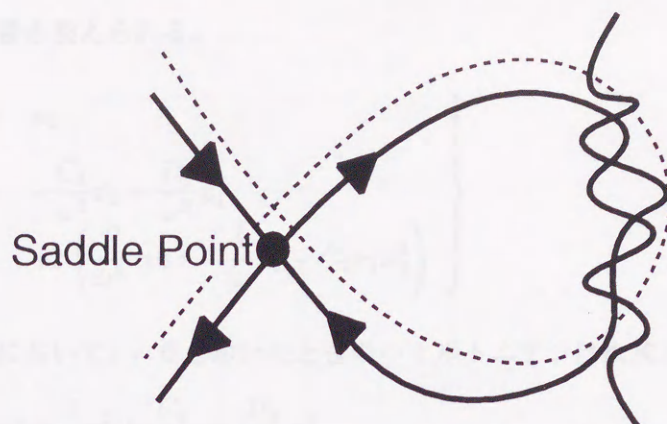


図 2.5: 摂動により分離したセパトリクス

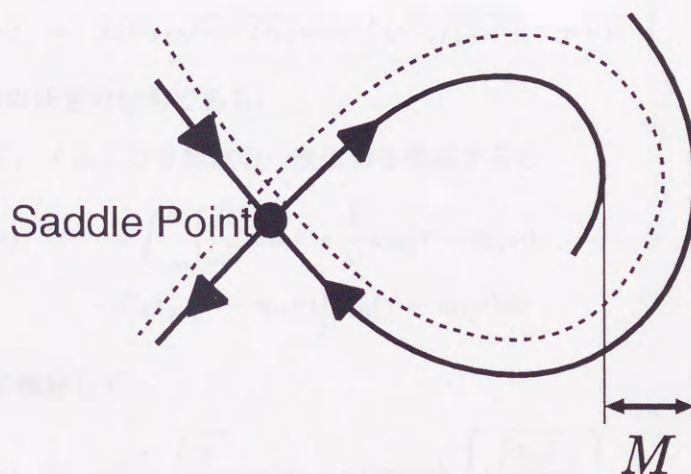


図 2.6: メルニコフ関数

予測できる⁽¹⁶⁾。

以上に述べたメルニコフ法の具体的な適用法および成功例を、佐藤らによる研究⁽⁹⁾を例として以下に概説する。

佐藤らは、スライダリンク機構のモデルに対するメルニコフ関数を求め、これに基づいてこのモデル上のカオス的挙動の存在条件について議論し、カオスを発生するパラメータ条件の特定に成功している⁽⁹⁾。その概要を以下に述べる。

図 2.7に示すようなスライダリンク機構のモデルとして知られる系の運動方程式⁽⁹⁾は、次式で定義される。

$$\ddot{x} + k\dot{x} + C_1x + C_2x\dot{x}^2 + C_3x^3 = B \cos \omega t \quad (2.8)$$

ε を微小量, $D_3 = -C_3$, $B = \varepsilon \bar{B}$, $k = \varepsilon \bar{k}$, $C_2 = \varepsilon \bar{C}_2$, $\tau = \omega t$ とするとき, 式 (2.8) は次式のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\bar{C}_1}{\omega^2} x_2 + \frac{D_1}{\omega^2} x_1^3 \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{\bar{B}}{\omega^2} \cos \tau - \frac{\bar{k}}{\omega} x_2 - \bar{C}_2 x_1 x_2^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

この摂動表現において $\varepsilon = 0$ とおいたときのハミルトニアンは次式となる。

$$H(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{C_1}{2\omega^2} - \frac{D_3}{4\omega^4} x_1^4 \quad (2.10)$$

特に $H = C_1^2/(4\omega^2 D_3)$ とおけば, 鞍点を通る軌道が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} x_{10}(\tau, \nu) &= \pm \sqrt{C_1/D_3} \tanh\{\sqrt{C_1/(2\omega^2)}(\tau + \nu)\} \\ x_{20}(\tau, \nu) &= \pm (C_1/\sqrt{2\omega^2 D_3}) \operatorname{sech}^2\{\sqrt{C_1/(2\omega^2)}(\tau + \nu)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

ここに ν は外力の任意の位相である。

これを用いて, メルニコフ関数の一次近似を構成すると

$$M(\tau_0, \nu) \cong -\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\bar{B}}{\omega^2} \cos \tau - \frac{\bar{k}}{\omega} x_{20}(\tau - \tau_0, \nu) - \bar{C}_2 x_{20}^2(\tau - \tau_0, \nu) \right] x_{20}(\tau - \tau_0, \nu) d\nu \quad (2.12)$$

となり, これを積分して,

$$M(\tau_0, \nu) \cong \varepsilon \bar{B} \frac{\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2}{D_3}} \cos(\tau_0 - \nu) \operatorname{cosech} \left\{ \sqrt{\frac{2\omega^2}{C_1}} \frac{\pi}{2} \right\} + \varepsilon \bar{k} \frac{4}{3D_3\omega^2} \sqrt{\frac{C_1^3}{2}} \quad (2.13)$$

を得る。

カオスの発生は, このメルニコフ関数が $M(\tau_0, \nu) = 0$ を満たすときに起こると考えられるので, この条件を用いて, カオスが発生すると思われる外力振幅 B の臨界値 B_c は

$$B_c = \frac{2k\sqrt{C_1^3}}{3\pi\omega\sqrt{D_3}} \sinh \left\{ \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2\omega^2}{C_1}} \right\} \quad (2.14)$$

となる。

図 2.8 に, 式 (2.8) のシステムに対して, $C_1 = 1$, $C_2 = 0.4$, $D_3 = 4$, $k = 0.4$, $\omega = 0.58$ の条件で, B を 0.1165 から 0.1235 まで変化させて数値的に求めた分岐図を示す。この図からカオスの挙動が, ほぼ $B > 0.1225$ の領域で生じていることが分かる。

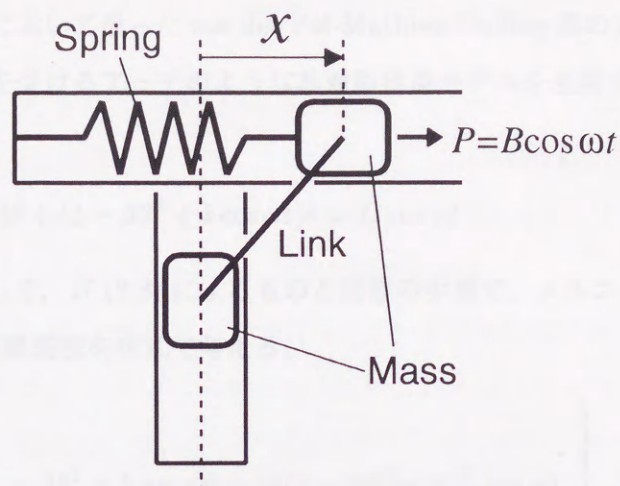


図 2.7: スライダリンク機構

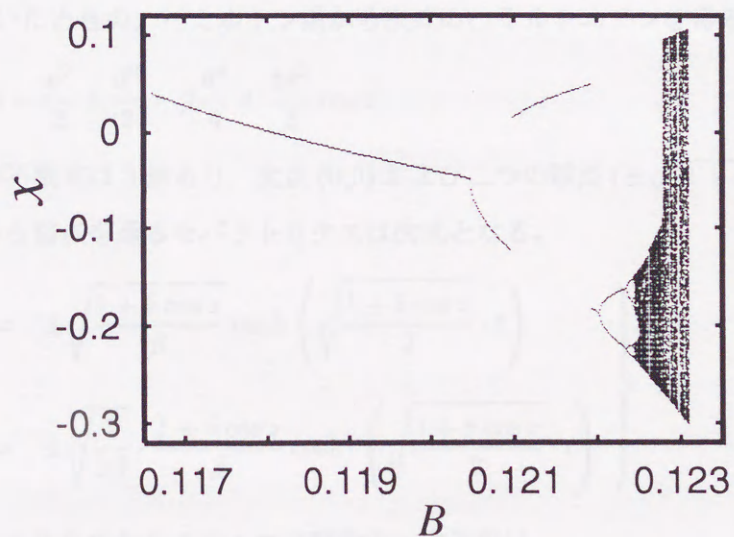


図 2.8: 分岐図

同条件で、式 (2.14) から B の臨界値を求めると、 $B_c \cong 0.1226$ が得られる。この結果から、この例においては、メルニコフ法によるカオスパラメータの推定が有効であるの
 が分かる。

2.3.2 メルニコフ法の適用限界

前節ではメルニコフ法による取り扱いの成功例をみたが、一方で、著者らのこれまでの研究から、扱うシステムによっては、得られたメルニコフ関数からパラメータの臨界

値を議論する際に困難を生じることが明らかになっている⁽¹⁰⁾。以下にその例を見る。

著者らが文献⁽¹⁰⁾において扱った van der Pol-Mathieu-Duffing 形の方程式を考える。この方程式は、外力を受けるアーチのような非対称構造モデルを表現するもので、次式で定義される。

$$\ddot{\theta} - (\gamma - \alpha\theta^2)\dot{\theta} + (1 - \beta\theta^2 + \delta \cos \omega t)\theta = I_p \cos \sigma t \quad (2.15)$$

この方程式に対して、式 (2.8) によるものと同様の手順で、メルニコフ関数を求める。まず、式 (2.8) の摂動表現を次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -(1 - \beta\theta^2 + \delta \cos z)\theta + \varepsilon\{(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\theta^2)v + \bar{I}_p \cos \phi\} \\ \dot{z} &= \varepsilon\bar{\omega} \\ \dot{\phi} &= \sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$\varepsilon = 0$ とおいたときの、ハミルトン系から次式のハミルトニアンを得る。

$$H(\theta, v) = \frac{v^2}{2} + \frac{\theta^2}{2} - \beta \frac{\theta^4}{4} + \frac{\delta \theta^2}{2} \cos z \quad (2.17)$$

式 (2.15) の不動点は 3 個あり、沈点 (0,0) および二つの鞍点 ($\pm\sqrt{(1 + \delta \cos z)/\beta}, 0$) である。これから鞍点を通るセパトリクスは次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_h^\pm &= \pm \sqrt{\frac{1 + \delta \cos z}{\beta}} \tanh \left(\sqrt{\frac{1 + \delta \cos z}{2}} \cdot t \right) \\ \theta_v^\pm &= \pm \sqrt{\frac{1}{2\beta}} \cdot \frac{1 + \delta \cos z}{\beta} \cosh^2 \left(\sqrt{\frac{1 + \delta \cos z}{2}} \cdot t \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

このセパトリクスからメルニコフ関数の一次近似は

$$M^\pm(t_0, z) = \int_{-\infty}^{\infty} [v^\pm \{(\gamma - a(\theta_h^\pm(t))v^\pm(t) + I_p \cos \sigma(t + t_0)\} + t\omega v^\pm(t)\delta\theta_h^\pm(t) \sin z] dt \quad (2.19)$$

となり、これを積分して次式を得る。

$$\begin{aligned} M^\pm(t_0, z) \cong & \frac{2\sqrt{2} \cdot \gamma}{3\beta} (1 + \delta \cos z)^{3/2} - \frac{2\sqrt{2} \cdot \alpha}{15\beta^2} (1 + \delta \cos z)^{5/2} \\ & \mp \sqrt{\frac{2}{\beta}} \cdot \pi I_p \sigma \cos \sigma t_0 \cdot \operatorname{cosech} \left(\frac{\theta \sigma}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \delta \cos z}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{2} \cdot \delta \omega}{\beta} \sqrt{1 + \delta \cos z} \cdot \sin z \end{aligned} \quad (2.20)$$

式 (2.20) のメルニコフ関数に関して

$$\frac{\partial M^{\pm}}{\partial t_0} = \pm \sqrt{\frac{2}{\beta}} \cdot \pi I_p \sigma^2 \sin \sigma t_0 \cdot \operatorname{cosech} \left(\frac{\theta \sigma}{2} \sqrt{\frac{2}{1 + \delta \cos z}} \right) \quad (2.21)$$

であるから、 $\sigma \neq 0$, $I_p \neq 0$, $t_0 \neq 0$, π/σ , $(2\pi)/\sigma$, \dots , $(n\pi)/\sigma, \dots$ に対して $\partial M^{\pm}/\partial t_0 \neq 0$ であり、 $M^{\pm} = 0$ は自明解を持たず、これによって、式 (2.15) のシステムに関して、横断的なホモクリニック軌道を生じるパラメータ条件の存在が証明される。これによって、式 (2.15) のシステム上のカオスの挙動の存在が証明される。

しかしながら、式 (2.20) の結果は、カオスパラメータの推定の目的には必ずしも適当でない。すなわち、式 (2.8) に対するメルニコフ関数 (式 (2.13)) の場合と異なり、式 (2.20) におけるメルニコフ関数の表現は極めて複雑であり、この式から具体的に、カオスを発生する臨界パラメータを求めることは困難である。仮に式 (2.20) を用いて臨界パラメータを特定することができたとしても、それに要する数学的操作は極めて複雑になることが予想される。

以上の例から、メルニコフ関数はカオスの存在証明に有効である一方で、その結果をカオスパラメータの推定などの工学的に意味のある問題の解決に利用することを考える場合、得られた結果を簡便に利用できない場合が生じ得ることが分かる。

2.3.3 フラクタル次元

第 2.2.1 節で述べたカオスの折畳みの機構によって生じるストレンジアトラクタのフラクタル構造を定量化するのが、フラクタル次元と呼ばれる量である。

実際によく利用されるフラクタル次元として相関次元がある。この相関次元は、次式の相関積分を利用して求められる⁽²¹⁾。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j}^N \theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (2.22)$$

ここに、 x_n ($n = 1, 2, \dots, N$) は d 次元のカオスの時系列、 $\|\cdot\|$ はノルム、 θ は次式のヘビサイド関数である。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (2.23)$$

ここで r が十分小さければ、その中でストレンジアトラクタはフラクタル構造を示すので、相関積分は計量形

$$C(r) \propto r^{D_2} \quad (2.24)$$

をもつと考えられ、その指数 D_2 が相関次元となる。

長島ら⁽²¹⁾は、カエルの心電時系列に対する D_2 の値を求め、心電時系列のゆらぎに、大間隔のものと小間隔のものが混在することを示した。また、この相関次元や第 2.3.6 節で述べる一般化次元のようなフラクタル次元は、計測されたカオスの時系列データから直接求めることができるので、機械振動系に生じるカオスの、実験的取り扱いに際してよく用いられている⁽³¹⁾⁽³³⁾⁽³⁴⁾⁽³⁶⁾。

2.3.4 リアプノフ指数

第 2.3.3 節におけるフラクタル次元とは対照的に、第 2.2.1 節でパイコね変換によって示した引き延し構造に起因するカオスの初期値鋭敏依存性を定量化するのが以下に述べるリアプノフ指数である。

カオス的な離散写像を

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.25)$$

と表現したときに、リアプノフ指数は

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_n} \quad (2.26)$$

と定義される。

カオスの挙動に対して、このリアプノフ指数は正値をとり、この条件は、カオスの判定条件として用いられている。

式 (2.26) の定義は、1 次元の離散写像に対する最も基本的な定義である。これを発展させて、多次元の連続時間系のカオスに対してのリアプノフ指数を計算するために、幾つかの試みがみられる。まず前提として、次式のような、 d 次元の連続時間系の挙動 $x(t)$ のポアンカレ写像による離散化を考える。

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.27)$$

佐藤らは、このような場合のリアプノフ指数を簡便に得るために、式 (2.27) の d 次元点列 x_n の第一成分にのみ着目し、式 (2.25) と同等の 1 次元離散写像を数値的に構成することによって、係数励振が自励振動とともに発生する系⁽⁸⁾、それに周期外力が加わった系⁽¹⁰⁾、リンクスライダ機構⁽⁹⁾、歯車軸系⁽¹¹⁾に発生するカオスの挙動のリアプノフ指数を求め、それらが正値を取ることを示した。

しかしながら、式 (2.25) と同等の 1 次元離散写像を構成する手法では、構成された 1 次元離散写像が単純な 1 次元弧として得られる必要があり、カオス分岐等によって生じ

る複雑な形状のストレンジアトラクタを有する挙動には、適用不可能であるという問題点があった。

このような制限を解消するためには、式(2.27)から直接リアプノフ指数を算出することが考えられる。その場合のリアプノフ指数の定義は次式となる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \ln \frac{|T(e_n)|}{|e_n|} \quad (2.28)$$

ここに e_n は x_n を始点とする単位ベクトルを表わす。

式(2.28)の定義から、具体的なリアプノフ指数の値を求めるための試みには、大きく二つの立場がある。

まず、富田ら⁽²⁵⁾が、不安定多様体方向の時間的に局所的なリアプノフ指数を求めるために用いたような第一変分方程式に基づく算出法がある。この手法では、式(2.28)における e_n の時間発展を、問題となるシステムの運動方程式から導かれる第一変分方程式から数値的に求め、そのノルムの拡大からリアプノフ指数の値を決定する方法である。この方法の欠点は、リアプノフ指数の算出にシステムの運動方程式を必要とする点にある。

これに対して、データ解析的な立場から同様の結果を得ようとするものに、佐野ら⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾による試みがある。そこでは、ポアンカレ写像 T を各離散時刻ごとに、行列 A_n で線形近似し、この A_n を、得られたカオスの時系列から最小二乗法によって推定することが行なわれている。この成果に基づき、機械振動系に生じたカオスのリアプノフ指数を求める試み⁽³⁴⁾が為されている。

以上が、現在みられるリアプノフ指数算出のための代表的な手法である。

このリアプノフ指数に関して、当初はその値を、挙動がカオス的であるか否かの判定基準にのみ使用するような立場が主であったが、現在までに、このリアプノフ指数に基づいた、より踏み込んだ立場が幾つかみられる。

その一つである富田ら⁽²³⁾⁽²⁴⁾の時間的に局所的なリアプノフ指数の、時間的ゆらぎに着目した統計力学による取り扱い、第2.3.6節の中で述べることにして、ここでは、佐野ら⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾の取り扱いについて簡単に触れておく。

佐野ら⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾は、多次元リアプノフ指数による、未知の1次元カオス時系列の、本来の次元数の推定の手法を提案している。そこでは、未知の1次元カオス時系列から、あとで述べる遅延座標によって再構成された任意の次元の時系列に対して、グラム・シュミットの直交化により、次元の各基底ごとにリアプノフ指数を求めると、これによって生じるリアプノフ指数の個数が、1次元カオス時系列の持つ本来の力学的次元に対応することを述べている。この問題は本研究の主題ではないが、例えば、未知の機械的現象のモ

デル化を考える場合、部材内部の力学的特性およびそれらの相互作用が未知で、生じている現象の力学モデルの次元が明確に確定できないような場合に、この多次元リアプノフ指数の結果がモデルに必要な力学的次元の目安を与えるのではないかと期待がもたれる。特に振動切削現象の解明にあたっては、振動切削現象の中にカオスの挙動が発生することを暗示する早乙女による研究⁽²⁹⁾があり、このような力学的次元が未知のカオスの挙動が発生する機械振動系に対しては、上述の多次元リアプノフ指数を適用できる可能性がある。

2.3.5 リアプノフ指数の適用限界

第 2.3.4 節において、リアプノフ指数が、カオスの判定条件や未知のカオスの挙動の力学的次元の推定に有効であることをみた。しかしながら、著者らのこれまでの研究⁽¹⁸⁾から、カオスからカオスの分岐、いわゆるカオス分岐を、このリアプノフ指数によって特徴付けようとした場合、明らかに質の異なるカオスの挙動の差異を明確に抽出できない場合が生じることが明らかとなっている⁽¹⁸⁾。以下にその実例を述べる。

カオス分岐の特徴抽出に関するリアプノフ指数の適用限界を示すための具体例として、文献⁽¹⁸⁾で議論した van der Pol-Mathieu 形振動系を考える。この振動系は、係数励振系が流体や部材間の摩擦などによる自励作用と相互作用する場合を記述するモデルであり、次式で定義される。

$$\ddot{\phi} + (\gamma - \alpha\phi^2)\dot{\phi} + (1 - \beta\phi^2 + \delta \cos \omega t)\phi = 0 \quad (2.29)$$

この振動系において、 $\alpha = 8$, $\beta = 3.8$, $\gamma = 0.33$, $\omega = 0.52$ および $\delta = 0.144, 0.14438, 0.144456$ の条件で数値的に求めたストレンジアトラクタを図 2.9 に示す。 δ の変化に伴って、カオスの挙動の質的な変化、すなわちカオス分岐が見られる。図中のリアプノフ指数は、式 (2.29) の第一変分方程式から、式 (2.26) における単位ベクトル e_n の時間発展を順次求めることによって算出した (この方法の詳細を第 4.2.2 節に示す)。

さて、図中のリアプノフ指数の値は、上から 0.54, 0.65, 0.67 となっており、下段二つの $\delta = 0.14438, 0.144456$ に対するアトラクタに対して近い値を示し、これらに対して $\delta = 0.144$ のリアプノフ指数は明らかに離れた値を示している。ところが一方で、アトラクタの形状を視覚的に判断すれば、離れたリアプノフ指数を取る $\delta = 0.144, 0.14438$ の両者が類似した形状を持ち、対して近いリアプノフ指数を取る $\delta = 0.14438, 0.144456$ が定性的に異なった形状を有しているのが分かる。カオスの挙動のパラメータ分岐とその場合にリアプノフ指数がとる値との間に、如何なる関係があるかという問題は未解決であ

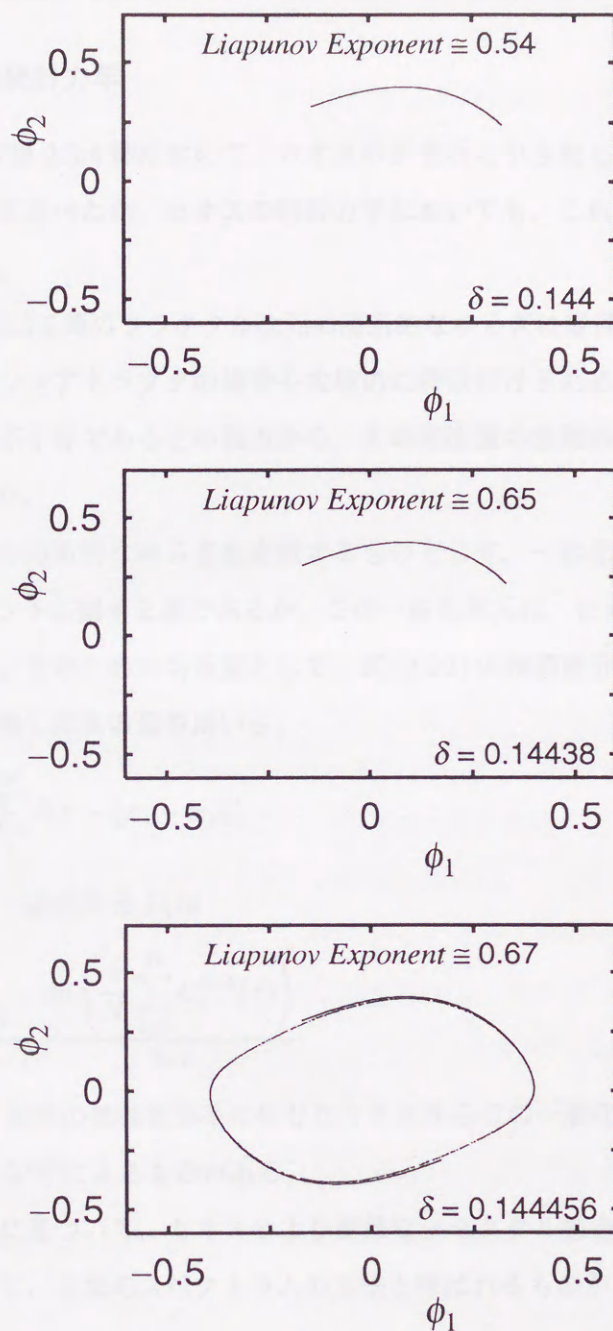


図 2.9: カオス分岐とリアプノフ指数

るが、この結果を見るかぎり、リアプノフ指数は、カオスの挙動の質的な変化を十分に抽出していないように思われる。

以上の例から、リアプノフ指数だけでは、カオス分岐による挙動の質的な変化を十分に取り出せない場合を生じることが明らかになった。その理由はリアプノフ指数が長時間平均による巨視量であることによると思われるが、この問題を解消する方法と

して、リアプノフ指数の局所時間的なゆらぎを取り出す統計力学の立場が考えられる。

2.3.6 カオスの統計力学

第 2.3.3 節および第 2.3.4 節において、カオスの折畳みと引き延しの構造に対応する二つの巨視量に関して述べたが、カオスの統計力学においても、これらに対応して、二つの立場が存在する。

まず一つが、第 2.3.3 節のフラクタル次元の局所的なゆらぎに着目するもので、空間的に偏在するストレンジアトラクタの構造を大域的に特徴付けるためには、巨視量のみに着目するだけでは不十分であるとの観点から、その局所量の空間的なゆらぎに着目したこの立場が現われた。

フラクタル次元の局所的なゆらぎを表現するものとして、一般化次元がある。相関次元は二次のモーメントに関する量であるが、この一般化次元は、任意の l 次のモーメントに関する量である。そのための局所量として、式 (2.22) の相関積分において、片方の添字に関する和を省略した次の量を用いる。

$$C_i(r) = \frac{1}{N} \sum_j^N \theta(r - \|x_i - x_j\|) \quad (2.30)$$

この量を用いて、一般化次元 D_l は

$$D_l = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{l-1} \frac{\ln \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i^{l-1}(r) \right)}{\ln r} \quad (2.31)$$

と定義される⁽²²⁾。現実の機械振動系に生じたカオスからこの一般化次元の値を求めた例としては、Water ら⁽³⁶⁾によるものがある。

この一般化次元に基づいて、カオスのより複雑なフラクタル構造の全体像を定量化するための方法として、大域的スペクトラムの方法と呼ばれるものがある⁽²²⁾。この方法においては、

$$\left. \begin{aligned} \alpha(l) &= \frac{d}{dl} \{(l-1)D_l\} \\ D_l &= \frac{1}{l-1} \{l\alpha(l) - f(\alpha(l))\} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

の関係を用いて求めた、 $\alpha(l)$ および $f(\alpha(l))$ の関係に着目する。

この大域的スペクトラムの方法を用いて、磁性体やベナール対流にみられるカオス的挙動の実測値から得た結果が、対応するロジスティックマップやサークルマップから求めたシミュレーション結果とよく一致すること示す報告が為されている⁽²²⁾。

これに対して、第 2.3.4 節で議論したカオスの引き延しの構造に着目したカオスの統計力学として、原ら⁽²³⁾、富田ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾による一連の研究がある。そこでは、定量化のための指標として、第 2.3.4 節で議論したリアプノフ指数の時間的な局所量を用いる。

原ら⁽²³⁾、富田ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾は、最大リアプノフ指数の時間的な局所量として、次式で定義される不安定多様体方向の局所的拡大率を用いている。

$$\lambda_1(x_k) = \max_{e_n} \ln \frac{\|T(e_n)\|}{\|e_n\|} \quad (2.33)$$

ここに x_n ($n = 1, 2, \dots$) はポアンカレ写像による、 d 次元の点列である。

このときの $\lambda(x_k)$ を適当な粗視化の個数 m で粗視化した粗視的拡大率を次式のように定義する。

$$\Lambda(x_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=k}^{k+m-1} \lambda_1(x_i) \quad (2.34)$$

この粗視的拡大率 $\Lambda(x_k)$ の確率密度関数 $P(\Lambda)$ から、分配関数

$$Z(q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\Lambda) \exp \{-n(q-1)\Lambda\} d\Lambda \quad (2.35)$$

を定義し、これに基づく特性量を求める。一連の特性量を動的構造関数と呼ぶ。

カオス分岐点近傍のストレンジアトラクタの局所構造は、この動的構造関数の上に生じる相転移として現われることを示し、これによってカオス分岐点近傍のカオスの挙動の物理的解釈を試みている。当初は、簡単な離散写像上に発生するカオスの挙動への適用例によって、基礎的な議論を展開していたが⁽²³⁾⁽²⁴⁾、文献⁽²⁵⁾においては連続時間系に生じるカオスに対しても同様の特徴抽出が可能であることを数値例で示している。

以上、二つの統計力学的立場を概観したが、大域的スペクトラムの方法が、現実の挙動と単純な離散写像の構造的な類似性を抽出し、カオス自体の有する特質を極めて一般的な観点から議論しているのに対して、動的構造関数による方法は、カオスの挙動の分岐点近傍の特徴抽出といった、工学的な解釈が比較的容易な立場で、カオスの特徴を議論していることが分かる。

2.4 カオスシステムの同定

2.4.1 遅延座標

考察対象の挙動の力学が本来 d 次元の構造を有していたとして、 d 個存在する状態変数が全て計測可能であるとは限らない。機械工学で問題となるようなシステムの中で一番単純と考えられる、一自由度の常微分系においてさえも、サンプリング周波数の限界などにより速度に関する有意な計測が不可能な場合が生じ得る。

このような場合に、解析に使用する理論が、1次元の時系列のみに着目するようなものであれば問題ないが、カオスの挙動の取り扱いにみられるような、折畳みや引き延しなどの相空間上の多次元の位相構造に着目するような立場においては、計測できる変数の減少は、解析上重要な位相構造の情報が射影によって隠蔽される結果をもたらす、得られる結果の信頼性において致命的である。

この困難を解消する手段として遅延座標による方法がある。Takens⁽¹⁷⁾は、本来 d 次元の力学構造を有する力学系から一次元の変数 $y(t)$ のみが観測されている場合を考え、この $y(t)$ から生成される次式の遅延座標の軌跡 $\mathbf{y}(t)$ が、本来の d 次元軌道と微分同相であることを示した。

$$\mathbf{y}(t) = (y(t), y(t+\tau), y(t+2\tau), \dots, y(t+(d-1)\tau)) \quad (2.36)$$

ここに τ は適当な時間遅れである。

この結果を利用すれば、任意次元の力学系上の挙動の位相構造を取り扱う場合、その挙動の一つの変数に着目することで十分である。

この1次元の時系列からの軌道の再構成問題は、次節で述べる力学系の流れを同定するような立場とは異なり、解析に必要なデータを得るための手法を与えるものといえる。

2.4.2 カオスの挙動の局所時間予測

カオスが非線形振動系に普遍的にみられる現象であるとの認識が一般化するまでは、不規則挙動の予測問題は、カルマンフィルタなどに代表されるような、確率論的な立場で解かれてきた。この場合、予測の精度は、予測の際の時間きざみに依存しない。

これに対して、問題となる不規則挙動がカオスである場合、時間きざみを減少させることによって、予測の精度を向上させるような予測問題を考えることが可能となる。理論的には、任意の精度を得ることができることになるが、第2.2.1節においてパイコね変換でみたような現実的な予測精度の限界の問題は、そのまま持ち越されるので、カオスの挙動の予測問題は、本質的に局所時間予測の問題に留まるといえる。

この局所時間予測の問題は、必要とする予測可能時間によって大きく二つの立場に分れる。

ひとつが、ポアンカレ写像一回程度、すなわち周期外力系であれば外力の一周期程度の、極めて短時間の予測を行なう立場である。この立場では、たとえ連続時間系のカオスを扱う場合でも、着目するのはポアンカレ写像を経た離散的点列である(現実の挙動の観測データは、既に計測のサンプリング間隔ごとの離散列として得られていることが多いが、ポアンカレ写像による離散化は、このサンプリング間隔の 10^2 から 10^3 倍程度の、遥かに長い周期で行なわれることに注意を要する)。このポアンカレ写像の点列の推移を、線形写像として近似的に記述し、この線形写像を用いて予測を行なう。

この考え方は、OttoらによるOGY法⁽¹⁾⁽²⁾の取り扱いの中に見ることができる。OGY法は、コントロールパラメータへの微小な制御入力によって、カオ斯的挙動を周期化するものである。その内容は、コントロールパラメータの微小な変化によって、鞍点の座標を変化させ、鞍点自身の不安定性を斥力として、一周期後の解を鞍点の安定軸上に乗せるというものである。そのためには、ある解が一周期後に安定軸上に乗るための予測を行わなければならないが、このために、上に述べた線形写像によるポアンカレ写像の近似を用いている。

いま一つが、離散時間系における非線形写像、連続時間系における非線形作用素をそのまま同定する立場である。カオ斯的挙動は決定論系に発生する力学的現象であるから、その力学的構造が特定されれば、局所時間の予測が可能になる。この事実を踏まえれば、ここでの基本的立場は、従来から行われてきた非線形モデル同定におけるものと同一と考えてよい。

非線形特性の表現として、多項式を用いるものとしては、Masriら⁽³⁾⁽⁴⁾によるチェビシェフ多項式に基づくもの、Giora⁽⁵⁾による不変測度に直交する一般化されたフーリエ展開に基づくものなどが知られている。特にGiora⁽⁵⁾は、カオ斯的挙動の局所時間予測を主題にしており、カオ斯的挙動にエルゴード性を仮定することで、不変測度に関して直交する基底を導入し、これによって張られる級数の係数を、非線形のあてはめを全く用いずに求めるという、カオ斯的挙動の性質を最大限に活用した同定法を提案している。

またその他に、最近、特に記憶のモデル化等で注目を集めているものとして、ニューラルネットワークに関する研究があるが、これを用いて、システムの非線形動特性を表現しようとする試みがある。菅野ら⁽⁶⁾は、一自由度のダフフィング系の動特性を、ニューラルネットワークによって表現し、良好な同定結果を得ている。

2.5 機械振動系におけるカオス

本節では、第 2.4 節までに概観した、現状のカオスに関する研究の成果が、どの程度、機械振動系におけるカオスの研究に反映しているかを見る。

機械工学の立場でカオスの応用例を考えれば、その究極は、機械装置上に存在するカオスがなんらかの機能を果すような、工学的創造を行なうことにあると思われる。このような目標を達成するためには、まず、物理的に実現された機械装置上にカオスが存在し得ることを示さなければならない。

現在までに為されてきた、数々の数値シミュレーションによる研究により、代表的な機械振動系のモデル上にカオスの挙動が存在することが明らかとなっている。現在までに数値的にカオスの挙動の存在が確認された機械系力学モデルを列挙すれば、強制振り子のモデル⁽²³⁾、支点の上下する振り子のモデル⁽¹⁸⁾、座屈した梁の強制振動を記述するダッフィング形モデル⁽⁷⁾、リンクスライダ機構のモデル⁽⁹⁾、非対称軸剛性を持つロータ系のような係数励振系が部材の摩擦などによる自励振動と相互作用する系のモデル⁽⁸⁾や、さらにそこに周期外力が作用した系のモデル⁽⁹⁾、歯車軸系のモデル⁽¹¹⁾⁽¹²⁾、鉄道車輪軸系のモデル⁽¹³⁾、切削モデル⁽³⁰⁾など枚挙にいとまがない。

このような、機械振動系におけるカオスの挙動の存在を示すシミュレーション結果を踏まえて、現在までに、物理的に実現された機械装置上のカオスの存在を示す報告が幾つか為されている。

Moon⁽³¹⁾は、図 2.10 に示すような、二つの磁気吸引力を受けた片持ばりの強制振動系において、カオスの挙動が発生することを実験的に示し、このカオスの挙動がメルニコフ法による予測の条件内で生じていることを指摘した。また Hatwal ら⁽³²⁾は、図 2.11 に示すような、二自由度の係数励振振り子の機械装置を製作し、これ上にカオスの挙動が生じることを示し、初期値とパワースペクトル密度の関係を示した。永井⁽³³⁾は図 2.12 に示すような、圧縮による座屈後のはりを横励振し、そこにカオスの挙動が生じることを示し、その場合の相関次元を求めている。さらに、永井ら⁽³⁴⁾は図 2.13 に示すようなケーブルで拘束を受ける片持ばりに対して同様の実験を行ない、得られた二つのタイプのカオスの挙動について最大リアプノフ指数と相関次元を求め、これに基づき両者の挙動の複雑さについて述べた。

また、本論文では第 5 章において、機械装置上のカオスの挙動として、図 2.14 に示すようなモデルで表現される係数励振振り子上のカオスを取り上げるが、既にほぼ類似した装置を用いた実験的研究が存在する。Leven ら⁽³⁵⁾は、振り子主軸まわりの粘性減衰を変

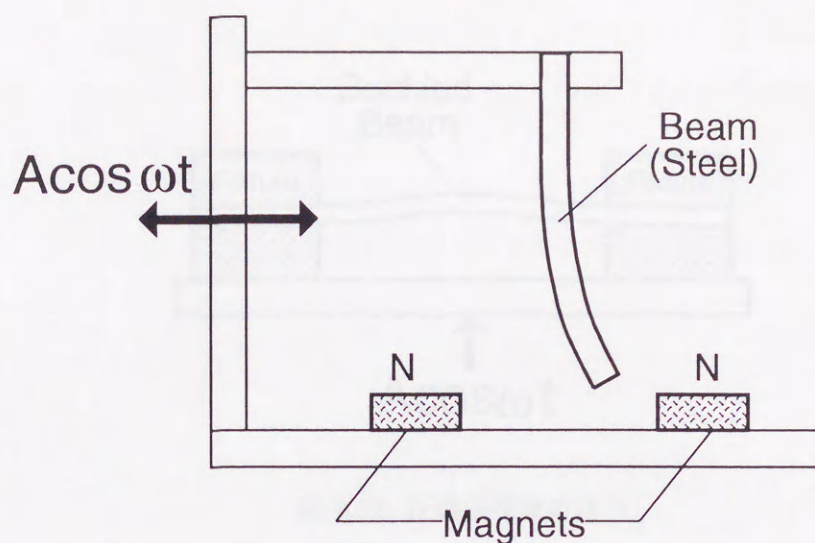


図 2.10: 二つの磁気吸引力を受けた片持ばり

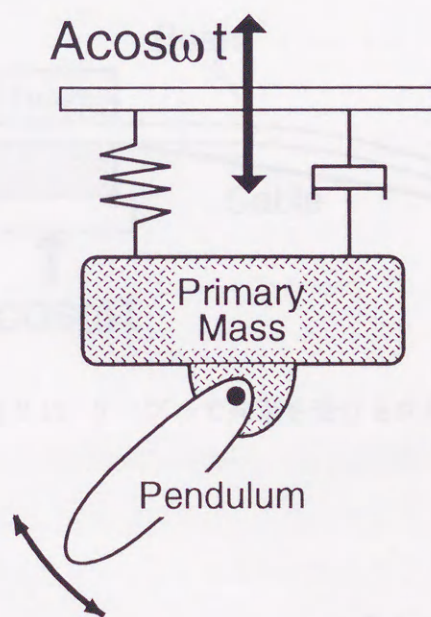


図 2.11: 二自由度の係数励振振り子

化させ、これに伴う周期挙動の周期倍分岐、さらにカオス的挙動への分岐を再現している。一方で、Water⁽³⁶⁾は、係数励振振り子の力学モデルにおける粘性減衰の表現を精密化し、実験によって得たものと極めて類似したストレンジアトラクタをシミュレーションにより再現した。この結果を踏まえて、不安定周期軌道、一般化次元のとり値などについて、実験とシミュレーションの比較を行なっている。

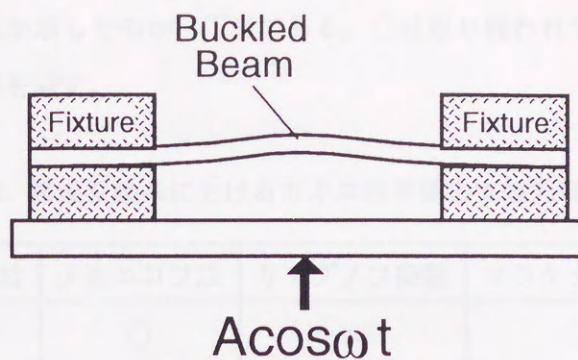


図 2.12: 圧縮座屈後のはり

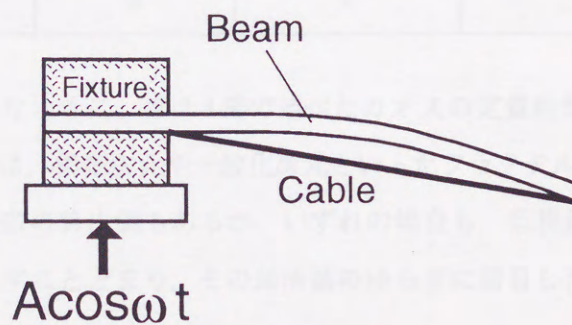


図 2.13: ケーブルで拘束を受ける片持ばり

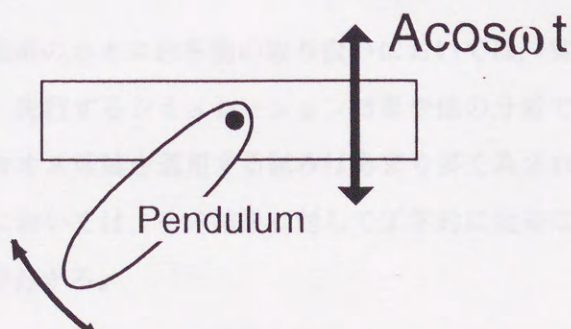


図 2.14: 係数励振振り子

以上、機械装置上に生じるカオスの挙動に関する研究の概観を述べた。これらの研究における取り扱いの内容に、分岐現象の取り扱い及び第 2.3 節で要約した定量的な取り扱いが含まれるか否か示したのが、下表である。○は取り扱われている内容、×は取り扱われていない内容を表す。

表 2.1: 機械振動系におけるカオスの挙動の実験的取り扱い

	分岐	メルニコフ法	リアプノフ指数	フラクタル次元	統計力学
Moon ⁽³¹⁾ (図 2.10)	×	○	×	○	×
Hatwal ら ⁽³²⁾ (図 2.11)	×	×	×	×	×
永井 ⁽³³⁾ (図 2.12)	×	×	×	○	×
永井ら ⁽³⁴⁾ (図 2.13)	○	×	○	○	×
Leven ら ⁽³⁵⁾ (図 2.14)	○	×	×	×	×
Water ⁽³⁶⁾ (図 2.14)	×	×	×	○	×

この表から明らかなように、第 2.3 節で述べたカオスの定量的な指標の中で比較적으로利用されているのは、相関次元や一般化次元といったフラクタル次元であるといえる。一方でリアプノフ指数の算出例もあるが、いずれの場合も、巨視量の値、または局所量の分布をそのまま示すにとどまり、その局所量のゆらぎに着目した統計力学に基づく立場はみられない。

メルニコフ法に関しては、Moon⁽³¹⁾の中にのみ見ることができる。分岐現象については、Leven ら⁽³⁵⁾による取り扱いが最も詳細で、第 2.2.2 節に指摘したような、性質の異なる、複数の周期運動および複数のカオスの挙動を実験的に再現しているが、その結果になんらかの定量的な評価を与えるような試みは為されていない。

以上から、機械振動系のカオスの挙動の取り扱いにおいては、実験的に得た現実のカオスの挙動に対して、先行するシミュレーション結果や他の分野での成果によって有効性の確認されているカオス理論を適用する試みはあまり多く為されておらず、またカオス理論を適用した例においては、その結果に対して工学的に明確な意味づけを十分に行ない得ていないことが分かる。

2.6 考察

2.6.1 考察の立場

第 2.2 節～第 2.4 節において、現状におけるカオス研究における成果についての概要を述べ、第 2.5 節においては機械振動系におけるカオス的挙動の取り扱いについて概観した。これを踏まえて本節では、本研究の主要課題である

- A. カオスシステムのモデリング誤差の評価
- B. 分岐現象の予測および特徴抽出

の 2 点からみた場合の、現状のカオスの取り扱いの問題点を考察し、それに基づき本研究の基本的動機を明らかにする。

2.6.2 カオスシステムのモデリング誤差の評価

この問題は、工学的には、非線形のモデル同定問題に深く関係する。代表的な非線形モデル同定の手法について第 2.4 節で述べたが、これらの手法が、対象の挙動がカオスであるがために無効になるということは、考えにくい。通常このような手法は、相空間上に広く分布するデータ点を得るために、入力としてサイン波掃引やホワイトノイズを用いるが、カオス的挙動はそれ自体で連続スペクトルを有しており、これが好都合である場合も生じるであろう。問題は、同定によって特定されたモデルの妥当性を評価する段階で生じると思われる。

図 2.15 に、現状において一般的にみられる、現実のカオスを取り扱う場合の立場を示す。このように、現象のモデルの妥当性の評価は、モデル上の数値解と現実の挙動が類似したものであるという事実に基づいて行なわれるが、現状での問題は、この類似性の評価が極めて定性的に為されていることである。

このことの具体例は、Giona⁽⁵⁾がカオス的挙動の局所予測の結果を評価する段階や、Leven ら⁽³⁵⁾が実挙動とシミュレーションとを比較する段階での取り扱いの中にみることができる。両者の共通点は、極めて高精度と思われるモデルを得つつも、その妥当性に関して定量的な評価を行っていない点である。両者とも、実挙動とシミュレーションの時間波形やストレンジアトラクタを並べて提示し、視覚的に確認される類似性によって、モデルの妥当性を主張している。

その原因は、実挙動とそのモデルの関係を定量化するための指標が、現状では用意されていないことにあると思われる。その理由は、図 2.1 の二つのカオス的点列に仮想的な意味づけを行なうことによって明らかになる。

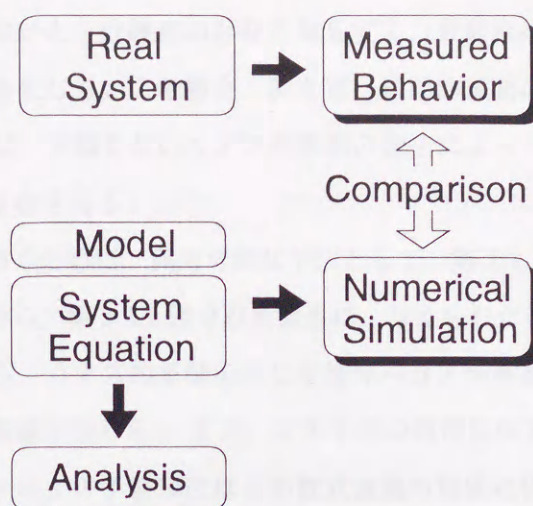


図 2.15: 現状におけるカオスシステムの取り扱い

上段の点列を実挙動，下段をモデルから数値的に得た挙動と見なせば，この例は，完全なモデルを得つつも初期値の設定が完全でない場合と考えられる。これらの点列は同一の力学構造によって生成されているが，両者の挙動は有限時間後に無相関になる。したがって，通常二つの挙動の類似性を定量化するのに用いられるような，誤差平均等の指標が意味をなさない。

現実の問題においては，数値モデルに実挙動と完全に一致する初期値を与えることは不可能であり，さらに完全なモデルが得られることも起り得ないので，誤差平均等の指標が意味を持つような状況はまずもって存在し得ないと考えられる。このことが，現実のカオスの挙動とそのモデルの関係を定量化することを困難にしており，Giona⁽⁵⁾や Levenra⁽³⁵⁾のといった定性的な立場の原因と考えられる。

以上の考察を踏まえれば，現実のカオスの挙動とそのモデルの関係を定量化可能であるような，新しい指標の必要性が明らかになる。

図 2.15にみるようなカオス研究の現状を考慮すれば，この新しい指標は，モデルがカオスの挙動の力学構造を完全に再現したとき最小値をとるような性質を持てばよい。

このような指標を実現するために本研究では，カオスの同期現象の利用を考える。このことの詳細は，第 3 章において議論する。

2.6.3 分岐現象の予測および特徴抽出

この問題は，カオスシステムの適切な設計・制御を考える上で，不可避な問題である。

まず、周期的挙動からカオスの挙動への分岐現象に関しては、これに関する知識が事前に十分得られていないと、分岐点の存在を知らずに、分岐点をまたぐような設計・制御が為される危険性を生じる。この場合、例えば、周期的運動の状態のみを考慮した機械装置が製作されれば、予期しないカオスの挙動の発生によって、装置の機能低下、ないしは故障・破壊をまねき得る。

このような問題を防ぐために、利用可能な手法として、第2.3.1節で述べたメルニコフ法がある。しかしながら、第2.3.2節でみたように、与えられた運動方程式の形によっては、得られた結果から、カオスの挙動を生じる臨界パラメータを取り出す手順が、極めて複雑になるという問題を生じる。また、この手法の適用にはシステムの数式表現が前提であり、臨界パラメータの予測精度はこの数式表現の精度に依存するので、一般的な機械装置などの、正確な運動方程式を得ることが困難なシステムへの適用は簡便でない。第2.5節においてみた幾つかの機械振動系におけるカオスの実験的な取り扱いにおいて、メルニコフ法がほとんど利用されていないのは、この事情によると考えられる。このことは、一方で時系列のみから適用可能なフラクタル次元の導入例が多いことに裏づけられていると思われる。

以上から、メルニコフ法は、その工学的な利用において必ずしも簡便でないことが分かる。

また一方で、カオスからカオスへの分岐現象を扱うことは、将来的なカオスの積極的な工学的応用を企てるうえで必要不可欠である。このことに関する十分な知識が得られれば、幾つかの異なる性質を持つカオスを自在に推移するような装置を実現することも不可能でない。このような将来的な目標の実現に向けては、メルニコフ法のような解析的なアプローチと、フラクタル次元のようなデータ解析的なアプローチが考えられるが、ここでは、メルニコフ法において生じたような問題の解消を考慮して、データ解析的なアプローチに話題を限る。

データ解析的な立場において、既に実用段階に達していると思わせるのがフラクタル次元を用いる方法である。特に、機械振動系の取り扱いにおいては、第2.5節に述べたように、相関次元や一般化次元の利用が盛んである。しかしながら、得られたフラクタル次元から、分岐現象の理解に必要な情報を解釈することは、現状では極めて困難であると思われる。第2.5節に述べた諸研究の立場は、得られた結果を単に提示するものであり、これによってカオス特有の性質について述べているが、それに基いて、工学的に有用と思われるような主張を行なうことは為されていないように見受けられる。このこ

とは、フラクタル次元が示す値の解釈の難しさを裏付けているのではないか。このフラクタル次元の局所量のゆらぎに着目した大域的スペクトラムの方法も存在するが、これはアトラクタの大域的な性質を定量化するものであり、分岐直前の徴候を示すようなアトラクタの局所構造の変化を取り出すようなものではない。

もう一つの量としてリアプノフ指数があるが、これを分岐現象の理解に利用しようとすると、第2.3.5節で具体例を示したように、明らかに存在するカオスの挙動の質的な差異が、リアプノフ指数の値として現われないという問題を生じ得る。

このような現状において、分岐現象の理解に有力と思われるのが、原ら⁽²³⁾、富田ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾によるリアプノフ指数の局所時間的なゆらぎに着目した立場である。この方法が取り出すのは、分岐点近傍のストレンジアトラクタの局所構造の変化である。これによって、分岐を引き起こす可能性を有するアトラクタを明確に特徴付けることができる。

以上から、カオスの分岐現象を特徴付けるためには、リアプノフ指数の時間的なゆらぎに着目した立場が有効であることが分かる。しかしながら、既存の、原ら⁽²³⁾、富田ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾の研究では、非線形力学系に発生するカオスを数理科学的な立場から解析することを主眼としているため、データ解析的な立場での利用は考慮されておらず、そのままでは、適用にあたって系の運動方程式が必要である。そこで、第4章では、系の運動方程式が未知で、カオスの時系列のみが得られている場合に、同様の結果を得るための方法について論じる。そこでの結果を踏まえて、第5章では、機械振動系にカオスの挙動を再現し、これに対して第4章で議論した方法を適用する。

第2.5節の最後で、機械振動系におけるカオスの取り扱いにおいては、現状では、得られた結果の工学的な意味合いが明確でないという問題点を挙げたが、第4章の議論では、機械振動系におけるカオス分岐という工学的意味づけの明確な現象を、データ解析的な立場から定量的に取り扱い可能な実例を示すことで、この問題点の解消を試みる。

第3章

カオスの同期現象とシステム同定問題

3.1 はじめに

本章で展開する議論の最終目標が、あるカオスの挙動に対して、その力学構造を反映したモデルが得られたときに最小値をとるような指標を構築することにあることは、第2.6.2節において既に述べた。本章では、この最終目標を達成するための準備的な研究を行なう。このために必要な指標の定義にカオスの同期現象を利用する。

まず、カオスの同期現象に関する基礎的な事項を述べ、この同期現象を定量化するための指標として『同期カオス規範』を定義する。そしてこの指標が、カオスシステムの同定問題を考えるにあたって、どのように利用可能であるかについて述べ、この考え方の有効性を数値例によって確認する。

3.2 カオスの同期現象

第2.2.1節で述べたような不規則性を有する二つのカオスシステムが、カオスの挙動を生じながら同期の状態を保持するということは考えにくいですが、このカオスの同期現象に関して次の事実が知られている⁽²⁶⁾。

n 次元の自律システム

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad (3.1)$$

を考える。ここで、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ は n 次元ベクトル、 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ は n 次元ベクトル値関数である。この n 次元のシステムを二つのサブシステムに分解し、これらを次のようにおく。

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.2)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3.3)$$

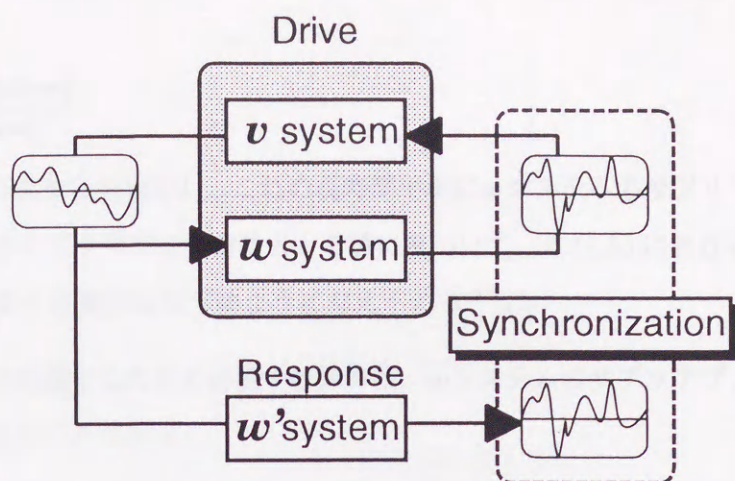


図 3.1: 同期システム

ここで, $v = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $w = (u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_n)$ および $g = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $h = (f_{m+1}, f_{m+2}, \dots, f_n)$ である。以下, 式 (3.1) を u システム, 式 (3.2) を v システム, 式 (3.3) を w システムと呼ぶ。

いま, $h' = h$ なる関数を用いて, w システムの複製として, 次式の w' システムを考える。

$$\dot{w}' = h'(v', w') \quad (3.4)$$

この w' システムの v' に, w システムの v を代入したものを用いて, 次の $(n+m)$ 次元システムを構成する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= g(v, w) \\ \dot{w} &= h(v, w) \\ \dot{w}' &= h'(v, w') \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

このシステムにおいて, v および w システムを駆動システム, w' システムを応答システムと呼び, 両者をあわせた式 (3.5) のシステム全体を同期システムと呼ぶ。

このシステムの模式図を図 3.1 に示す。この模式図に示すように, 挙動の同期は w と w' の間に生じるが, そのためには式 (3.5) の同期システムが, ある条件を満たす必要がある。その条件を以下に述べる。

偏差 $\Delta w = w' - w$ を考える。 w と w' の同期が $\Delta w \rightarrow 0$ のときにのみ生じることは明らかである。偏差 Δw の時間的推移は次の変分方程式によって記述される⁽²⁶⁾⁽²⁷⁾。

$$\frac{d\Delta w}{dt} = D_w h(v, w) \Delta w + O((\Delta w)^2) \quad (3.6)$$

ここに $D_w h$ は h の w に関するヤコビアンである。 Δw が十分小さく $O((\Delta w)^2)$ が無視できるとすれば,

$$\ln \frac{\|D_w h \Delta w\|}{\|\Delta w\|} \quad (3.7)$$

は Δw の拡大の大きさを表わし、これの長時間平均は w システムのサブリアプノフ指数と呼ばれる。このサブリアプノフ指数のとり値に基づいて、式 (3.5) における w と w' が同期するための必要十分条件は以下のように与えられる⁽²⁷⁾。

- w と w' が同期するための必要十分条件は、 w システムのサブリアプノフ指数が全て負値を取ることである。

ここで全て負値という表現は、独立な基底ごとに求まるリアプノフ指数が全て負値をとる、という事実を表わしている。したがって通常は最大リアプノフ指数に着目すればよく、これが負値をとれば同期が生じることになる。

3.3 同期カオス規範

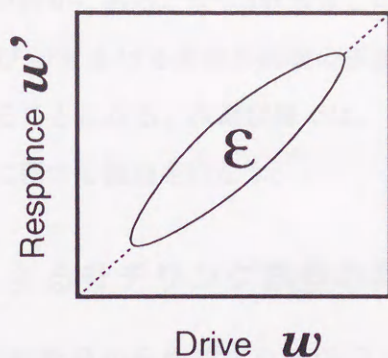
第 3.2 節では $h = h'$ の場合のみを考えたが、ここでは $h \neq h'$ の場合も併せて考察する。以下の議論においては、 w システムのサブリアプノフ指数は全て負値を取ると仮定する。簡単のため、次式のような 3 次元の同期システムを考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{v} &= g(v, w) \\ \dot{w} &= h(v, w) \\ \dot{w}' &= h'(v, w') \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ここに v, w, w' はスカラ、 g, h, h' はスカラ値関数である。

ここで、変分 $\delta h = h' - h$ を考えれば、 $\delta h = 0$ のときが、第 3.2 節で議論した理想的な場合に相当する。この場合、 w と w' の間には完全な同期が生じ、 w - w' 平面上の解軌道は直線 $w' = w$ の上に存在すると考えられる。一方で、 $\delta h \neq 0$ のときは、 δh の拡大とともに同期の精度が劣化し、軌道は直線 $w' = w$ のまわりを摂動し、その軌跡はある面積 ε 内に分布すると考えられる。これを図 3.2 に示す。このとき ε の規模は δh の規模と無関係ではなく、両者は何らかの相関を持つと考えるのが自然である。そこで ε の規模の定量化を考える。

まず、 ε の規模を測る指標として、 w - w' 平面上の w および w' に関する回帰直線まわりの誤差平均の利用を考えてみる。これに必要な統計量を以下に定義する。

図 3.2: δh による解の存在領域の拡大

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \langle w \rangle \\ \bar{w}' &= \langle w' \rangle \\ \sigma_w^2 &= \langle (w - \bar{w})^2 \rangle \\ \sigma_{w'}^2 &= \langle (w' - \bar{w}')^2 \rangle \\ \sigma_{ww'}^2 &= \langle (w - \bar{w})(w' - \bar{w}') \rangle \\ \rho &= \frac{\sigma_w^2 \sigma_{w'}^2}{\sigma_{ww'}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

ただし $\langle \cdot \rangle$ は長時間平均を表わす。

これを用いて、 w - w' 平面上の w および w' に関する回帰直線まわりの誤差二乗平均 E^2 は次式で表わされる。

$$E^2 = \frac{1 - \rho^2}{\frac{1}{\sigma_{w'}^2} + \frac{1}{\sigma_w^2} \cdot \rho^2} \quad (3.10)$$

この誤差二乗平均 E^2 によって、 ε の規模は十分に表現可能であると思われるが、このままでは、 w および w' のスケール変換に対して不変でないので、 w および w' の依存する量を省略した次の量を定義する。

$$\Gamma = \sqrt{1 - \rho^2} \quad (3.11)$$

この量を『同期カオス規範』と呼び、以下、ISCS(Index of Synchronization of Chaotic Systems) と略記する。

ISCS は同期の精度を定量化する指標であるが、この指標が $\delta h = 0$ のとき最小値である零値をとることは、以上の議論から明らかである。一方で、 $\delta h \neq 0$ のとき、 δh の規模が十分大きければ、 w と w' は非同期の状態になり、ISCS は最大値 1 に近い値をとること

になると思われる。問題は、 δh が中程度の規模を持つとき、ISCS が δh の規模に応じた十分滑らかな特性を持つか否かにある。もし ISCS がこの要求を満たせば、ISCS は、二つのカオスシステム w および w' における非線形関数の誤差 δh を評価するための定量的指標として、利用可能であることになる。次節以降では、単純なモデルリング誤差の評価問題を例として、この点に関する議論を行なう。

3.4 同期カオス規範によるモデリング誤差の評価

3.4.1 一自由度非線形振動系から生成される同期システム

ISCS の具体的な応用例を与えるために、次式で定義される一自由度の非自律系を考える。

$$\ddot{z} + f(z, \dot{z}, t) = 0 \quad (3.12)$$

ここに f は非線形関数を表わす。

この表現は、第 2 章で議論した外力を受ける非線形振動系の一般化である。この方程式を一階の連立方程式として以下のように書き直す。

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f(z_1, z_2, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

式 (3.13) の第二式の複製、 $\dot{z}_2' = f'(z_1, z_2', t)$ を考え、これと式 (3.13) によって構成される次の 3 次元同期システムを考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f(z_1, z_2, t) \\ \dot{z}_2' &= f'(z_1, z_2', t) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

この同期システムの模式図を図 3.3 に示す。この同期システムの特徴は、図 3.1 で示した一般的な同期システムと同様に、応答側の z_2' システムの出力が、駆動側の z_1 および z_2 システムにフィードバックされない点にある。このことから生じる重要な事実を以下に示す。

- 応答側の z_2' システムの挙動が、駆動側の z_1 および z_2 に影響を与えることはない。

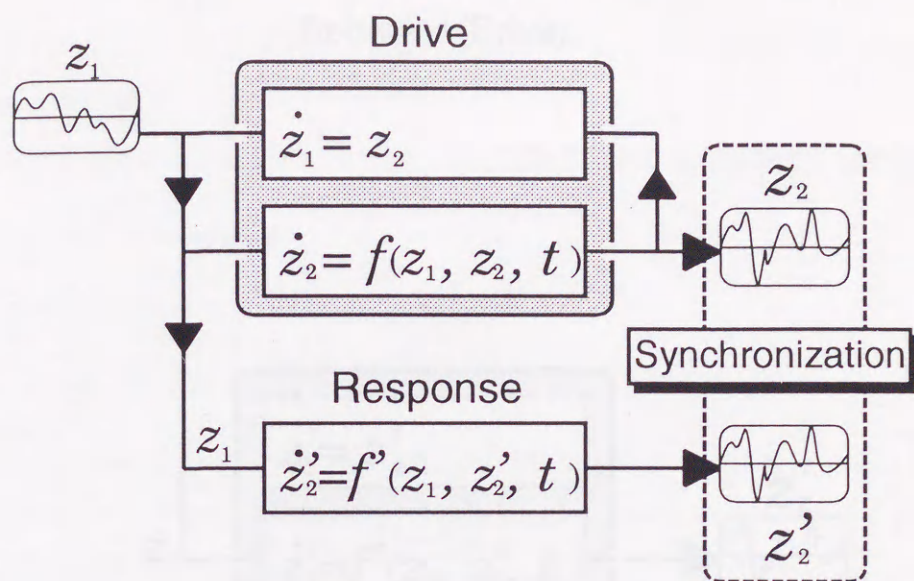


図 3.3: 一自由度非線形振動系から生成される同期システム

3.4.2 カオスの挙動とそのモデルから生成される同期システム

図 3.3に示すような同期システムは、応答側の z_2' システムの挙動が、駆動側の z_1 および z_2 に影響を与えない、という顕著な性質を有する。本節では、この性質を利用した、カオスの挙動のモデリング誤差の評価問題の定式化を行なう。

上に述べた同期システムの構造により、次の事実が明らかである。

図 3.3における z_2 と z_2' の間に同期を生じさせるにあたって、

- 駆動側の z_1 および z_2 システムの挙動と、応答側の z_2' システムの挙動は、必ずしも同時刻に生じなくてもよい。

この事実を踏まえて、次のようなカオスの挙動のモデリング誤差の評価問題を考えることができる。

いま、その力学構造が二階の常微分方程式によって表現されるような一自由度振動系から、 t を時間とするカオスの時系列 $(z_1(t), z_2(t))$ が得られているとする。この時系列の力学モデルを次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_1' &= z_2' \\ \dot{z}_2' &= f'(z_1', z_2', t) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

このとき、式 (3.15) の第二式である z_2' システムのサブリアプノフ指数が負値であり、かつ、時系列の力学構造が式 (3.15) のモデルで記述されるなら、 $z_1(t)$ で駆動される一階

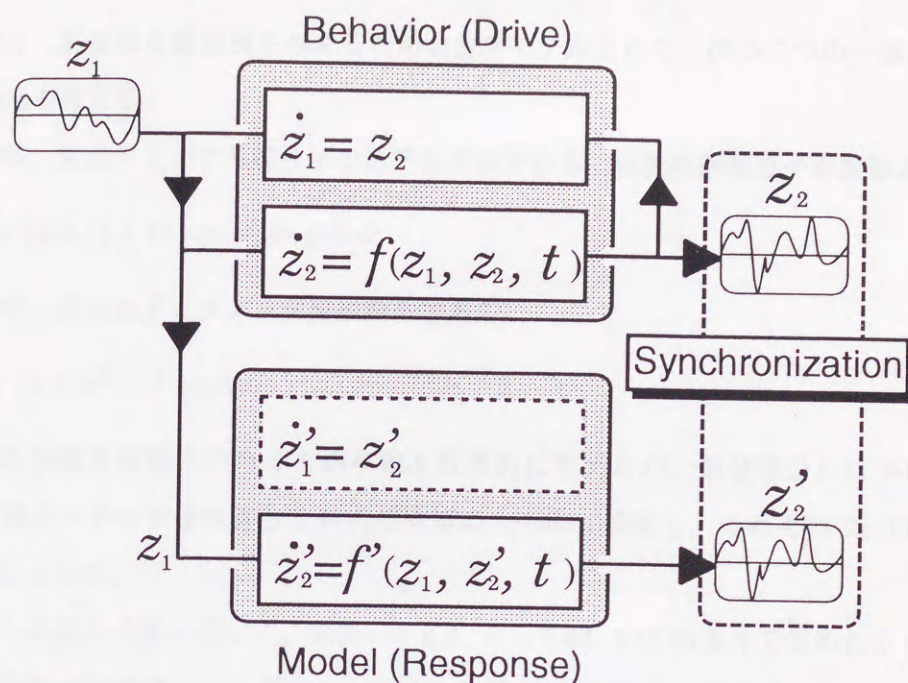


図 3.4: カオス的挙動とそのモデルから生成される同期システム

の常微分方程式

$$\dot{z}'_2 = f'(z'_1, z'_2, t) \quad (3.16)$$

の出力 $z'_2(t)$ は、時系列 $z_2(t)$ と同期する。このことを図 3.4 に模式的に示す。

ここで、第 3.3 節での議論を踏まえれば、モデルの精度、すなわち f' の近似精度はこの同期の精度となって表われると考えられ、その程度は ISCS によって定量化可能であることになる。

注意すべきは、第 3.4.1 節および本節での議論は、第 3.2 節における自律系での結果を、そのまま非自律系に用いている点である。しかしながら、著者らのこれまでの研究によって、非自律系においても、カオスの同期現象がみられる実例が示されており⁽²⁸⁾、ここでは、その結果を踏まえて、以上の非自律系に対する議論は妥当なものであるという立場をとった。

3.5 数値例

本節では、第 3.4 節での議論の有効性を検証するために、数値シミュレーションによって模擬的に生成した、外力を受ける一自由度非線形振動系のカオス時系列に対して、モデリング誤差を含むモデルを仮定し、この誤差と ISCS のとる値の関係について考察する。

3.5.1 力学モデル及びそれ上のカオス挙動

ここでは、具体的な数値例を与えるための力学モデルとして、次の二つの一自由度非線形振動系を考える。

ひとつが、支点の上下する振り子の力学モデルである、係数励振振り子形振動系

$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + [1 + 2b \cos \omega t] \sin \phi = 0 \quad (3.17)$$

いま一つが、次式のダuffing形振動系である。

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = I \cos \Omega t \quad (3.18)$$

これらの非線形振動系のカオスの挙動を数値的に求めるが、数値積分には RKG 法を用い、積分ステップは双方とも外力の周期の $1/100$ に設定し、それぞれ $2\pi/(100\omega)$, $2\pi/(100\Omega)$ とした。

式 (3.17) の振り子系に関して、条件 $\gamma = 0.2$, $b = 1.04, 1.15$ の条件で求めたカオスの挙動の 30000 点のポアンカレプロットを図 3.5, 図 3.6 に示す。励振振幅 b の微小な変化に伴って、 $b = 1.04$ における二つの島を交互に訪れるような 2 周期的な周期性の強いカオスの挙動から、 $b = 1.05$ における周期性が崩壊したバーストの状態にカオス分岐している。

また式 (3.17) のダuffing系に関して、 $c = 0.3$, $I = 10.5, 11$ の条件で求めたカオスの挙動の 30000 点のポアンカレプロットを図 3.7, 図 3.8 に示す。振り子系の場合と同様に、外力の振幅 I の微小な変化に伴って、 $I = 10.5$ における 3 周期的な周期性の強いカオスの挙動が、 $I = 11$ において、その周期性が崩壊しバーストの状態に推移している。

このような周期性の強いカオスの挙動がその周期性を崩壊するようなカオス分岐は、第 5 章においてみるように、機械的に実現された実験装置上にも生じる。

第 3.4.2 節で議論したような同期システムを考えるために、式 (3.17) の振り子系を

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -\gamma \phi_2 - [1 + 2b \cos \omega t] \sin \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

のように、式 (3.18) のダuffing形振動系を

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - x_1^3 + I \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

と書き換える。

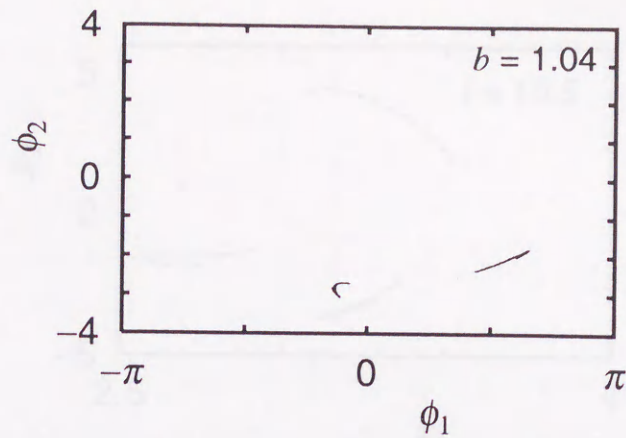


図 3.5: 振り子系のストレンジアトラクタ

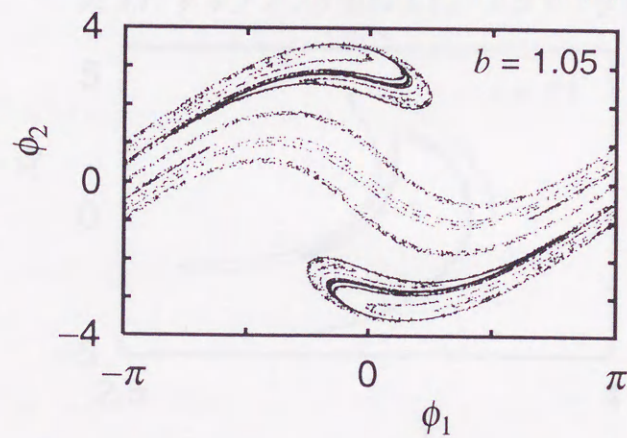


図 3.6: 振り子系のストレンジアトラクタ

次に、振り子系およびダuffing系のサブシステム、 ϕ_2 システムおよび x_2 システムのサブリアプノフ指数を求める。

それぞれのサブシステムの第一変分方程式はそれぞれ、 ϕ_2 システムに関して

$$\dot{\eta} = -\gamma\eta \quad (3.21)$$

x_2 システムに関して

$$\dot{\eta} = -c\eta \quad (3.22)$$

となる。それぞれの解は $\exp(-\gamma \cdot t)$, $\exp(-c \cdot t)$ となり、これらからそれぞれのサブリアプノフ指数は、それぞれ $-(2\gamma\pi)/\omega \cong -0.63$, $-(2c\pi)/\Omega \cong -1.88$ と、定数負値を示す。

このことから、両システムから第3.4.1節で述べたような同期システムを構成すれば、これらの同期システムには同期現象が発生する。

次節以降では、図3.5～図3.8に示したカオスから取得した時系列をデータとして用いる。

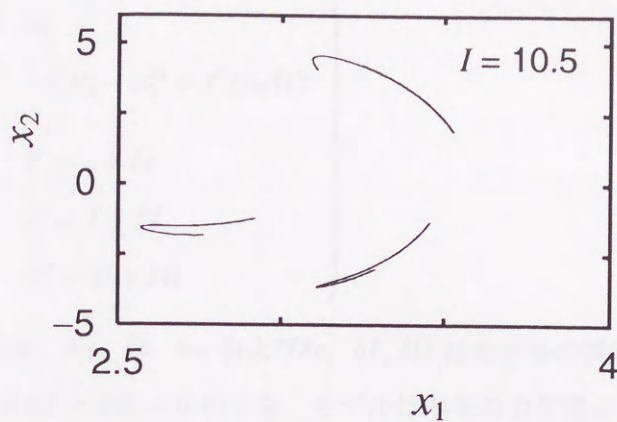


図 3.7: ダUFFING系のストレンジアトラクタ

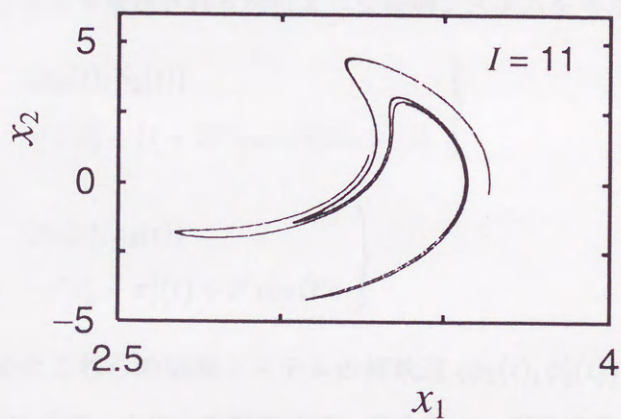


図 3.8: ダUFFING系のストレンジアトラクタ

3.5.2 システムパラメータの誤差

今、振り子系およびダUFFING系の時系列 $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ および $(x_1(t), x_2(t))$ が得られているとする。

これらの力学モデルとして、振り子系に関して、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1' &= \phi_2' \\ \dot{\phi}_2' &= -\gamma' \phi_2' - [1 + 2b' \cos \omega' t] \sin \phi_1' \\ \gamma' &= \gamma + \delta\gamma \\ b' &= b + \delta b \\ \omega' &= \omega + \delta\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

ダUFFING系に関して、

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1' &= x_2' \\ \dot{x}_2' &= -c'x_2' - x_1'^3 + I' \cos \Omega' t \\ c' &= c + \delta c \\ I' &= I + \delta I \\ \Omega' &= \Omega + \delta \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

を考える。ここに、 $\delta\gamma$, δb , $\delta\omega$ および δc , δI , $\delta\Omega$ はモデルの誤差であり、 $\delta\gamma = \delta b = \delta\omega = 0$ および $\delta c = \delta I = \delta\Omega = 0$ のとき、モデルは本来の力学構造と一致する。

これらのモデルの精度を定量化するために、第 3.4.2 節で議論したような、時系列とモデルの第 2 式によって構成される次のような同期システムを考える。

$$\left. \begin{aligned} &(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \dot{\phi}_2' &= -\gamma'\phi_2' - [1 + 2b' \cos \omega' t] \sin \phi_1(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} &(x_1(t), x_2(t)) \\ \dot{x}_2' &= -c'x_2' - x_1'^3(t) + I' \cos \Omega' t \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

数値的に求めたこれらの同期システムの解軌道 $(\phi_2(t), \phi_2'(t))$ および $(x_2(t), x_2'(t))$ を図 3.9～図 3.12 に示す。これらの解軌道は、刻み毎に、相当する位相の $\phi_1(t)$, $x_1(t)$ の値によって、各々の一階方程式を駆動することによって求めた。このときの数値積分は第 3.5.1 節における模擬データの生成と同条件で行なった。図中の ISCS の値 Γ は、2000 点のデータ点に対して求めた。

図 3.9, 図 3.10 は、振り子系のカオスの挙動に対する結果を表わす。図 3.9 は図 3.5 に示したような周期性の強いカオスの挙動をデータとしたときの結果、図 3.10 は図 3.6 のようなバースト状態にあるカオスの挙動をデータとしたときの結果である。いずれの場合も、誤差が 0 のときはほぼ完全に近い同期状態を示し、 Γ の値も 0 に近い値をとっている。これに対して、 γ' と b' に 15% の誤差を与えた場合は、明らかに同期の精度が劣化する結果を示し、それに伴って Γ の値も増大している。また、励振周波数 ω' に誤差を与えた場合は、非同期状態を示し、 Γ は 1 に近い値をとっている。この非同期状態の発生は、励振周波数に誤差が生じると、データ列が生成されたときのベクトル場と、モデルのベクトル場とが非同期の状態になり、両者の関係が同期の発生条件を満さなくなるためであり、予想された結果といえる。

一方で、図 3.11, 図 3.12 は、ダuffing 系のカオスの挙動に対する結果を表わす。振り子の場合と同様に、図 3.11 が図 3.7 に示したような周期性の強いカオスの挙動をデータ

としたときの結果, 図 3.12 が図 3.8 のようなバースト状態にあるカオス的挙動をデータとしたときの結果である。いずれの場合も, 振り子の場合と同様に, 誤差が 0 のとき Γ の値は 0 に近い値をとり, c' と I' に 15% の誤差を与えた場合に Γ の値が増大している。また, 外力の周波数 Ω' に誤差を与えた場合も, 振り子系の場合と同様, 非同期状態に対応して Γ が 1 に近い値を示している。



図 3.12 データ誤差モデルの同相 (振り子系: 図 3.8 の強いカオス系データとした場合)

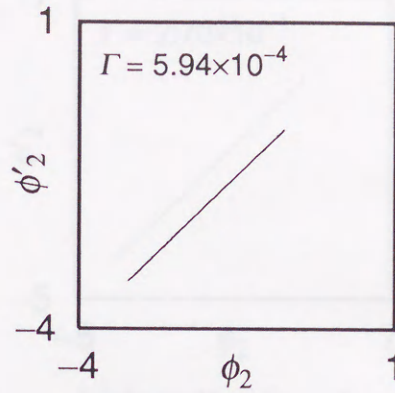
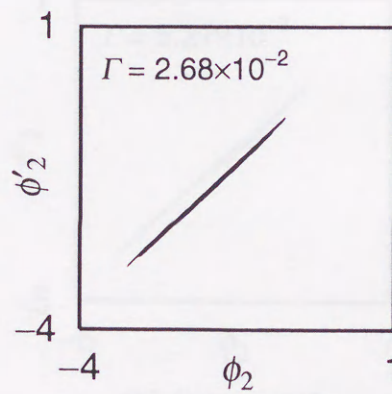
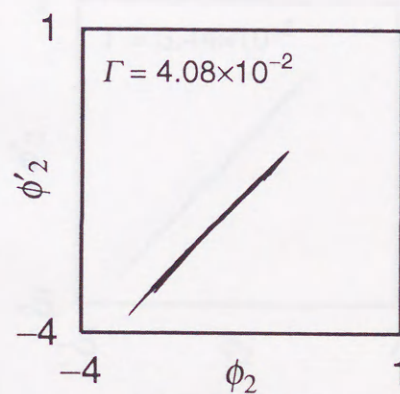
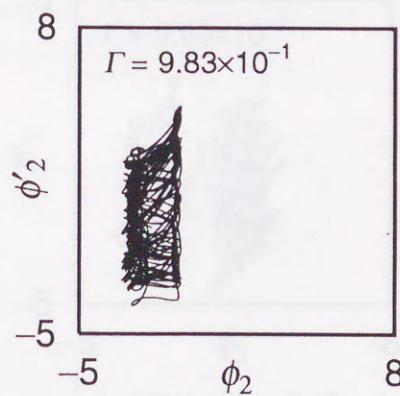
(a) $\delta\gamma = \delta b = \delta\omega = 0$ (b) $\delta\gamma/\gamma = 0.15$ (c) $\delta b/b = 0.15$ (d) $\delta\omega/\omega = 0.15$

図 3.9: データ列とモデルの同期 (振り子系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

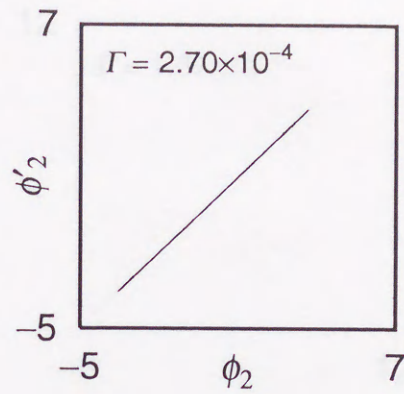
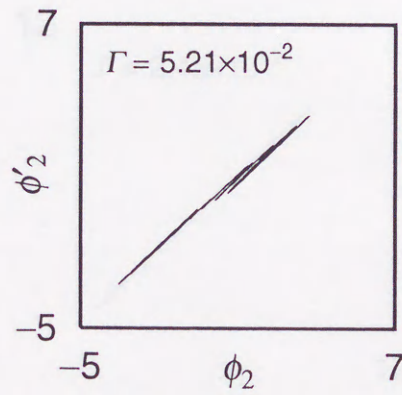
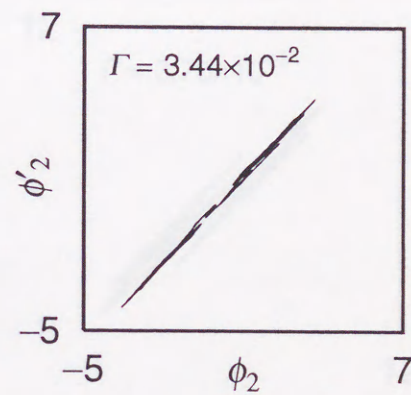
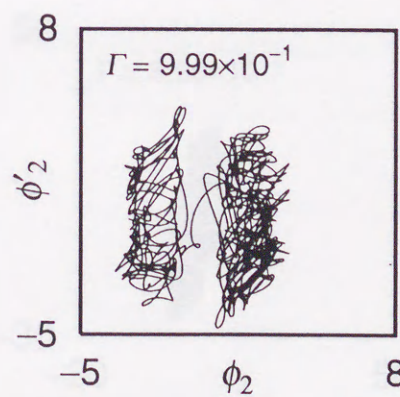
(a) $\delta\gamma = \delta b = \delta\omega = 0$ (b) $\delta\gamma/\gamma = 0.15$ (c) $\delta b/b = 0.15$ (d) $\delta\omega/\omega = 0.15$

図 3.10: データ列とモデルの同期 (振り子系: バースト状態のカオスをデータとした場合)

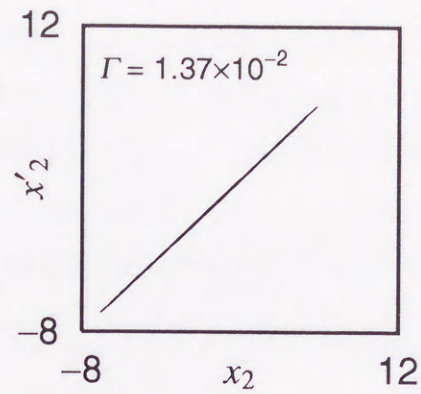
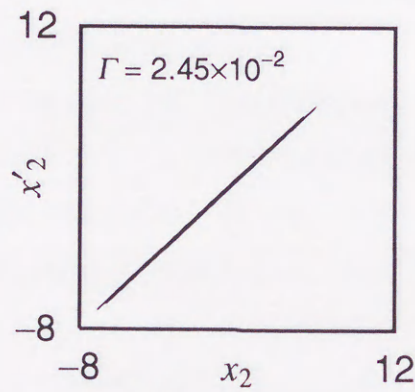
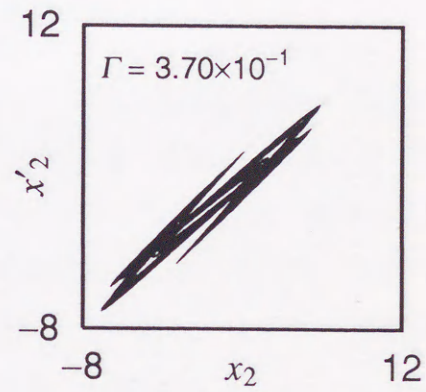
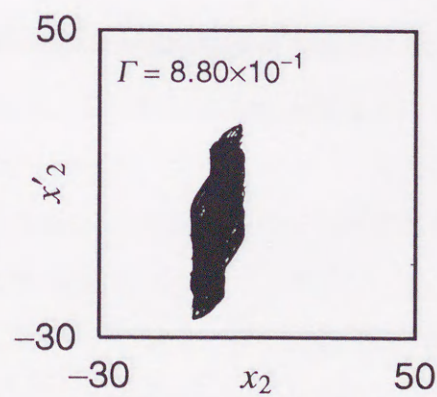
(a) $\delta c = \delta I = \delta \Omega = 0$ (b) $\delta c/c = 0.15$ (c) $\delta I/I = 0.15$ (d) $\delta \Omega/\Omega = 0.15$

図 3.11: データ列とモデルの同期 (ダッフィング系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

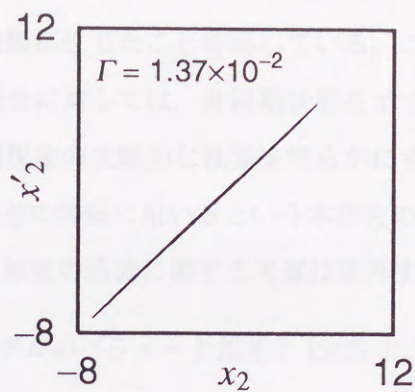
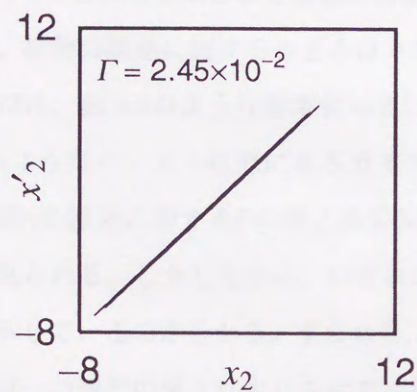
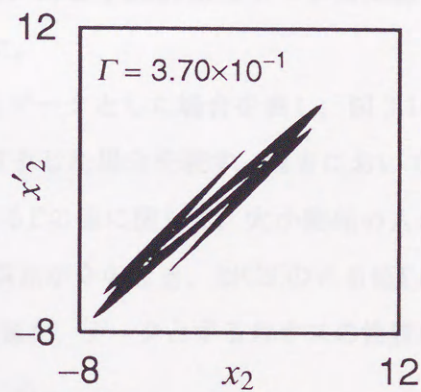
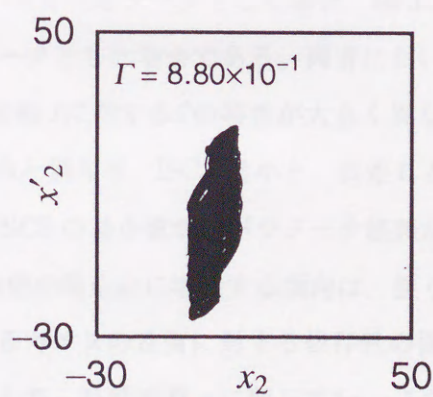
(a) $\delta c = \delta I = \delta \Omega = 0$ (b) $\delta c/c = 0.15$ (c) $\delta I/I = 0.15$ (d) $\delta \Omega/\Omega = 0.15$

図 3.12: データ列とモデルの同期 (ダuffing系: バースト状態のカ
オスをデータとした場合)

図 3.9～図 3.12の結果は、第 3.3 節において予想した、複製システムの誤差の拡大に伴う図 3.2のような軌道の存在領域の拡大が、カオスの挙動とそのモデルから生成される同期システムにおいても、実際に生じたことを示している。この中で、励振周波数や外力の周波数に誤差を与えた場合に対しては、非同期状態を示す結果が得られた。この問題は非自律系のカオスの同期現象の大域的な性質を明らかにする上で、極めて興味深い、同期現象をモデリング誤差の評価に用いるという本研究の目的にはそぐわないので、以後、励振周波数や外力の周波数の誤差に関する考察は除外する。

以上の結果を踏まえて、モデルのパラメータ誤差と ISCS のとる値 Γ との関係を、より詳しく見てみる。

振り子系に対する結果を図 3.13と図 3.14に示す。これらの結果は、図 3.9～図 3.12において図中の Γ を算出したときと同様の方法によって、同じく 2000 点のデータ点に対して求めた。横軸の誤差に関するきざみは 0.003 とした。

図 3.13は、図 3.5のような周期性の強いカオスをデータとした場合を表し、図 3.14は、図 3.6のようなバースト状態にあるカオスをデータとした場合を表す。両者においては、粘性減衰 γ の誤差に対する Γ の値と励振振幅 b に対する Γ の値に関して、大小関係の入れ変わりが見られる。しかしながら、いずれの場合も誤差が 0 のとき、ISCS のとる値 Γ が最小値を示しているのが分かる。すなわち、 Γ の最小値が、データとするカオスの性質によらず、同一の誤差の値上に生じる結果が得られている。

同様にして求めた、ダuffing系に対する結果を図 3.15と図 3.16に示す。図 3.15が、図 3.7のような周期性の強いカオスをデータとした場合、図 3.16が、図 3.8のようなバースト状態にあるカオスをデータとした場合である。両者において、粘性減衰 c の誤差に対する Γ の特性と、外力の振幅 I に対する Γ の特性が大きく異なっているのが分かる。さらに、振り子系に対するものと異なり、ISCS 最小と、誤差 0 とが対応しない結果が得られている。しかしながら、ISCS の最小値が、パラメータ誤差が 0 の付近に存在し、誤差の拡大に伴って、ISCS の値が滑らかに増加する傾向は、振り子系に対するものと同様である。また、データとするカオスの性質に対する依存性の面では、振り子系と同様な結果が得られている。すなわち、粘性減衰 c に関して $\delta c = 1.2 \times 10^{-2}$ 、外力の振幅 I に関して $\delta I = -6.0 \times 10^{-3}$ と、異なる二つのタイプのデータに対して、ISCS の最小値が同一の誤差の値上に生じている。したがってここでも、ISCS の最小値の位置が、データとするカオスの性質に依存しないことを示す結果が得られたことになる。

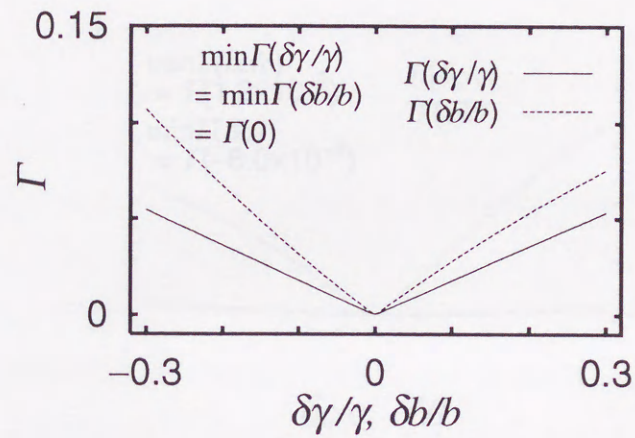


図 3.13: 粘性減衰および励振振幅と ISCS の値との関係 (振り子系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

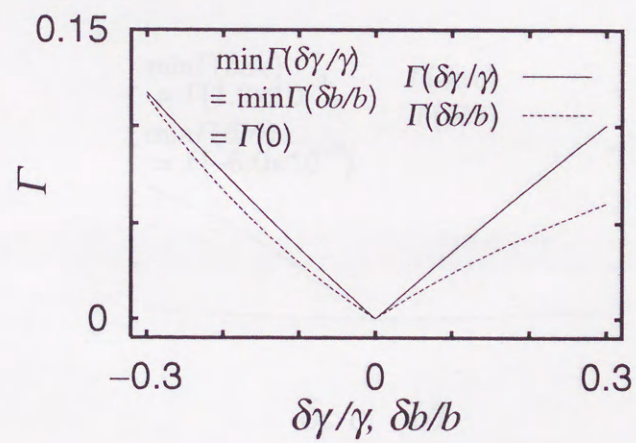


図 3.14: 粘性減衰および励振振幅と ISCS の値との関係 (振り子系: バースト状態のカオスをデータとした場合)

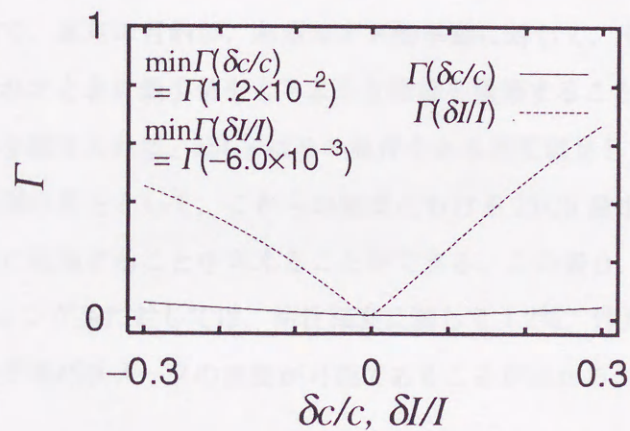


図 3.15: 粘性減衰および外力の振幅と ISCS の値との関係 (ダッフィン
グ系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

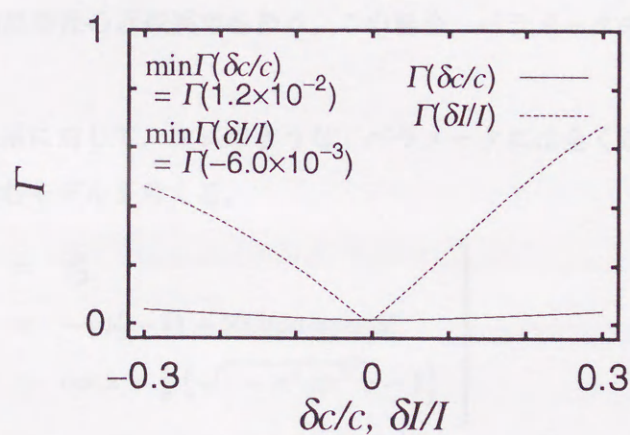


図 3.16: 粘性減衰および外力の振幅と ISCS の値との関係 (ダッフィン
グ系: バースト状態のカオスをデータとした場合)

以上、図 3.13～図 3.16 に示した結果を要約すれば、

- パラメータ誤差が 0 のとき、ISCS はほぼ最小値を示す。
- パラメータ誤差の増大に伴って、ISCS の値は滑らかに増加する。
- ISCS の最小値の位置は、データとするカオスの性質に依存しない。

となる。

本章の冒頭で、本章の目的が、あるカオスの挙動に対して、その力学構造を反映したモデルが得られたときに最小値をとるような指標を構築することにあることを述べたが、ここでの結果を踏まえれば、ISCS はその条件をある程度満足しているのが分かる。

この結果の別の見方として、これらの結果における ISCS 最小の条件を、モデルパラメータの調整に利用することを考えることができる。この場合、振り子系に関しては誤差 0、ダフティング系に対しては、粘性減衰に関して 1.2%、外力の振幅に関して -0.6% の精度で、モデルパラメータの調整が可能であることが分かる。

3.5.3 非線形特性の誤差

第 3.5.2 節では、モデリング誤差として、モデルに含まれるシステムパラメータの誤差を取り上げたが、本節では、その他のモデリング誤差の可能性として、励振波形の近似誤差と、非線形特性の近似誤差を扱う。この場合、パラメータの誤差は全て 0 として議論を進める。

まず振り子系に対して、次式のような、パラメータには全く誤差が含まれず、励振波形に誤差を含むモデルを考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 &= -\gamma\phi_2 - [1 + 2bh(\omega t)] \sin \phi_1 \\ h(x) &= \cos x + \frac{1}{\kappa} (\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

ここに、 $h(x)$ はスライダクランク機構の出力波形であり、 $\kappa \rightarrow 0$ の極限で $\cos x$ に一致する。

κ の値と ISCS のとる値の関係を、第 3.5.2 節での取り扱いと同様に求めた結果として、周期性の強いカオスをデータとした場合のものを図 3.17 に、バースト状態にあるカオスをデータとした場合のものを図 3.18 に示す。

図 3.17、図 3.18 のいずれの場合も、 $\kappa \rightarrow 0$ の極限で、ISCS が最小値に漸近していく様子が見てとれる。この ISCS の最小値への漸近は、モデルが本来の励振波形である $\cos x$ を再現していく過程を表わしている。

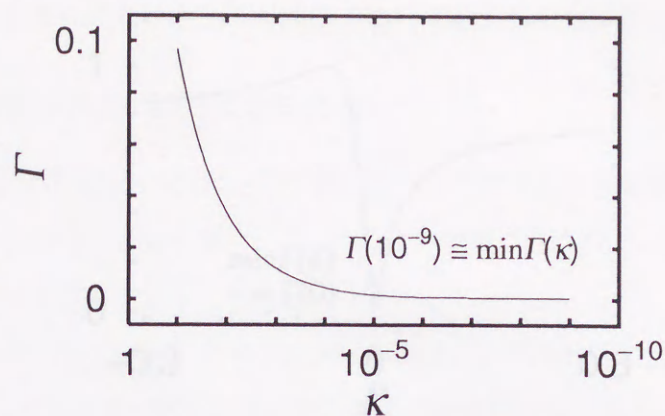


図 3.17: 励振波形の誤差と ISCS の値との関係 (振り子系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

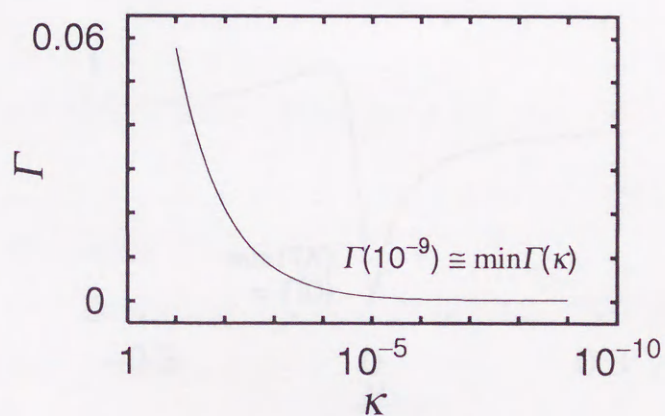


図 3.18: 励振波形の誤差と ISCS の値との関係 (振り子系: バースト状態のカオスをデータとした場合)

したがって、ここでも、誤差の減少と ISCS の値の減少の間には単調かつ滑らかな関数関係が存在しており、ISCS の有効性を示す結果が得られている。

次に、ダuffing系に対して、次式のような、パラメータには全く誤差が含まれず、非線形ばね特性に誤差を含むモデルを考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -cx_2 - f(x_1) + I \cos \Omega t \\ f(y) &= y^3 + Ky \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

ここに $f(y)$ はダuffing形の非線形ばね特性であり、 $K = 0$ のとき、本来のばね特性 y^3 に一致する。

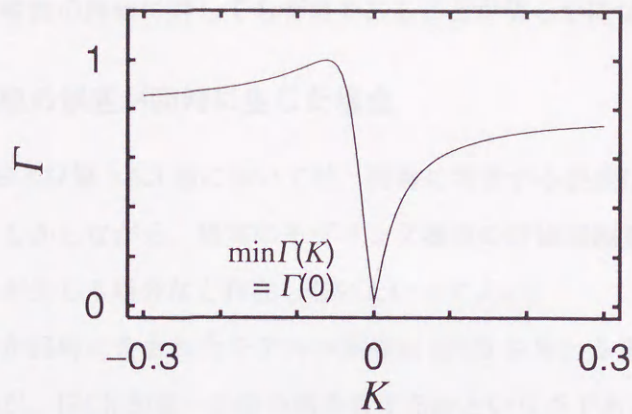


図 3.19: 非線形特性の誤差と ISCS の値との関係 (ダフティング系: 周期性の強いカオスをデータとした場合)

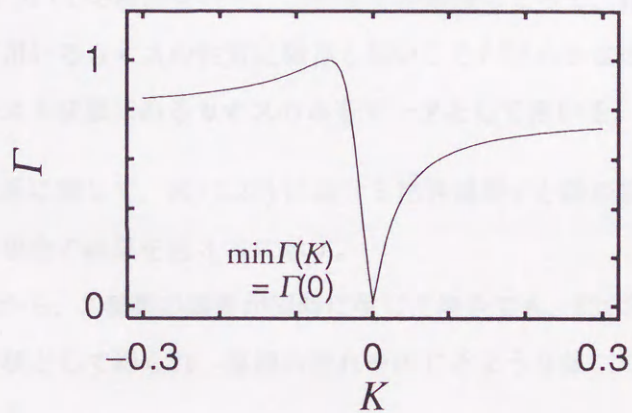


図 3.20: 非線形特性の誤差と ISCS の値との関係 (ダフティング系: バースト状態のカオスをデータとした場合)

K の値と ISCS のとる値の関係を、第 3.5.2 節での取り扱い等と同様に求めた結果として、周期性の強いカオスをデータとした場合のものを図 3.19 に、バースト状態にあるカオスをデータとした場合のものを図 3.20 に示す。

この場合も、 $K = 0$ 、すなわちモデルの非線形ばね特性がデータの力学構造に含まれるものと一致したときに、ISCS が最小値をとっている。ISCS がとる値の増減は、大域的に見れば単調ではないが、誤差 0 の近傍では、これまでにみた ISCS の特性と同様の傾向を示し、また、データとするカオス的挙動の性質に依らないという傾向はここでも見られる。

以上の結果から、ISCS は、モデルに含まれるパラメータ誤差のみならず、励振波形の

誤差、非線形特性の評価に対しても有効であることが明らかになった。

3.5.4 2種類の誤差が同時に生じた場合

第3.5.2節および第3.5.3節においては、同時に考慮する誤差は単一という条件での考察を行った。しかしながら、現実のモデリング誤差の評価問題を考えれば、モデルに単一の誤差のみが生じる場合など存在しないといってよい。

複数の誤差が同時に含まれたモデルの評価に ISCS を用いる場合、まず考慮しなければならないのが、ISCS が単一の最小値を有するかという点である。もし ISCS が複数の最小値を持つような特性を有するならば、誤差の評価結果に任意性が生じ、ISCS の値をもって、モデルの妥当性を評価することは困難になる。

そこで本節では、モデルに2種類の誤差を同時に与えたとき、ISCS がどのような特性を示すかについての検討を行う。これまでの議論によって、ISCS の最小値の位置は、データとして用いるカオスの性質に依存しないことが明らかなので、ここでは、不安定性の強いバースト状態にあるカオスのみをデータとして用いる。

まず振り子系に関して、式(3.23)における粘性減衰 γ' と励振振幅 b' の双方の誤差を同時に考慮した場合の結果を図3.21に示す。

これらの図から、2種類の誤差が同時に生じた場合でも、ISCS の値のとり曲面は一つの大きな凹形状として得られ、混同の恐れを生じるような第二の極小値は特に存在しないことが分かる。

また一方のダuffing系に関しては、次のモデルを考える。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -c'x_2 - f(x_1) + I' \cos \Omega't \\ c' &= c + \delta c \\ I' &= I + \delta I \\ f(y) &= y^3 + Ky \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

この式で表現されている誤差は、粘性減衰 c' 、外力の振幅 I' 、非線形ばね特性 $f(x)$ である。本来の力学構造が再現されるのは、 $\delta c = \delta I = K = 0$ のときである。これらの誤差と ISCS のとり値の関係を図3.22、図3.23、図3.24に示す。

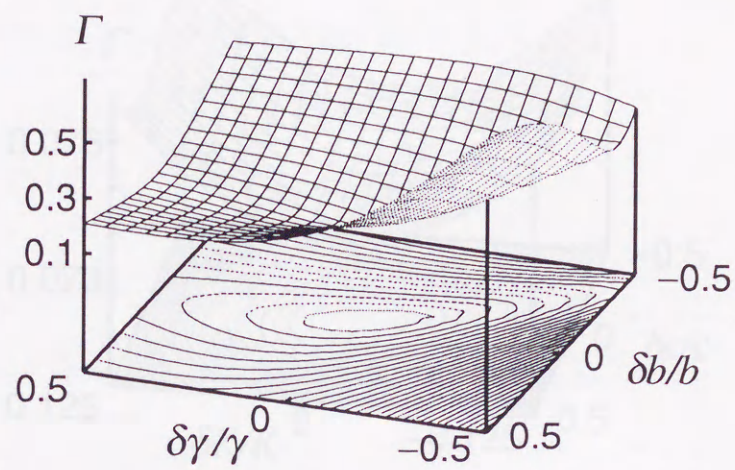


図 3.21: 粘性減衰および励振振幅と ISCS の値との関係 (振り子系)

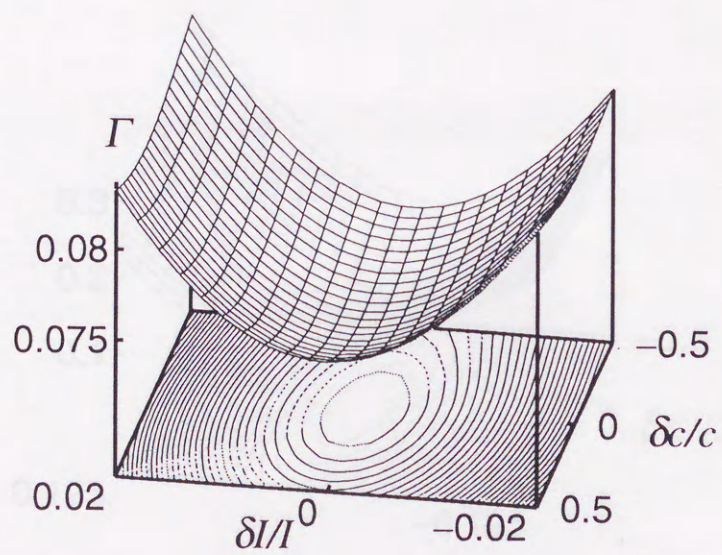


図 3.22: 粘性減衰および外力振幅と ISCS の値との関係 (ダフティング系)

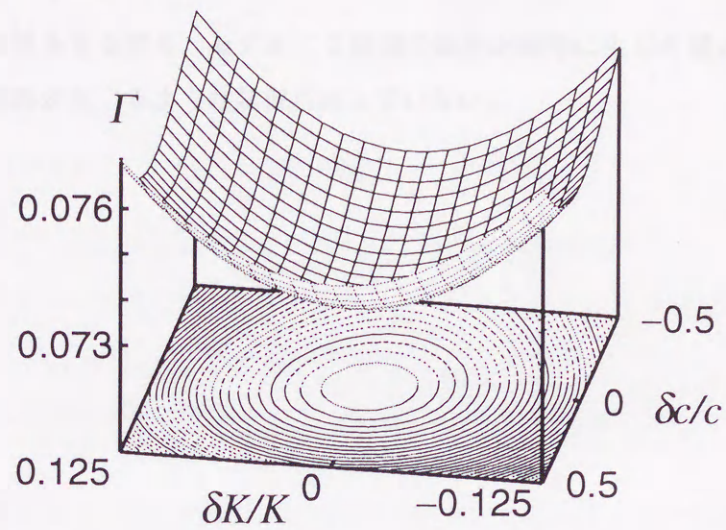


図 3.23: 粘性減衰および非線形ばね特性と ISCS の値との関係 (ダフティング系)

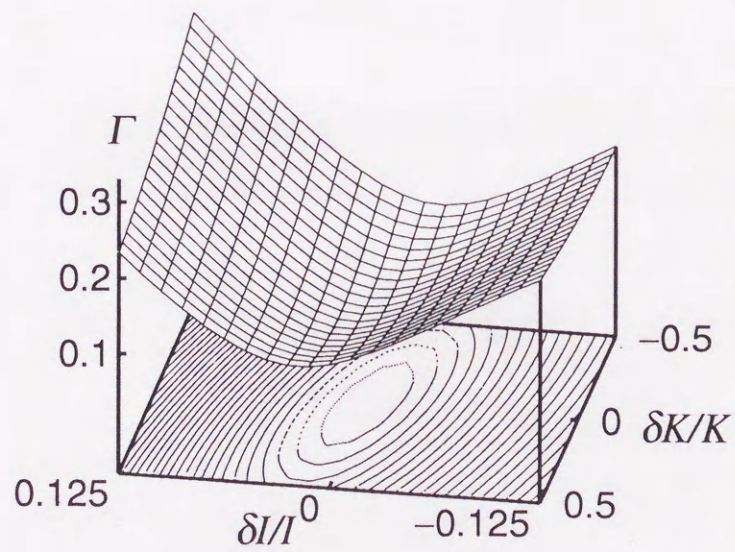


図 3.24: 外力の振幅および非線形ばね特性と ISCS の値との関係 (ダフティング系)

3.5 数値例

これらの図から、いずれの場合も、2種類の誤差が同時に生じたとき、ISCS の値は一つの大きな凹形状として得られ、混同の恐れを生じるような第二の極小値は特に生じていないことが分かる。

以上の結果を見る限り、モデルに2種類の誤差が同時に生じた場合でも、誤差の評価結果に任意性が生じるような状況は起っていない。

3.6 まとめ

本節では、あるカオスの挙動に対して、その力学構造を反映したモデルが得られたときに最小値をとるような性質を持つ、新しい指標の可能性について議論した。

このような性質を満足するであろう新たな指標として、カオスの同期現象を利用した ISCS(同期カオス規範)を定義した。そして、この指標によるモデリング誤差の評価問題を考え、数値実験により次の結果を得た。

- モデリング誤差が0のとき、ISCS はほぼ最小値を示す。
- モデリング誤差の増大に伴って、ISCS の値は滑らかに増加する。
- ISCS の最小値はただ一つ存在する。
- ISCS の最小値の位置は、データとするカオスの性質に依存しない。

以上の結果から、第 2.6.2 節においてその必要性を論じた、新たな指標のもつべき性質を、ISCS が十分に有することが明らかになった。

第4章

カオスの特徴抽出

4.1 はじめに

本章の主要課題は、カオスの分岐現象を、データ解析的な立場から定量的に取り扱うための具体的な方法を提示することにある。そのために本章では、第2.6.3節で述べたように、リアプノフ指数の時間的局所量のゆらぎに着目する。

まず、第4.2節においては、対象の振動系の運動方程式が既知の場合と未知の場合のそれぞれについて、リアプノフ指数の時間的局所量である局所的拡大率の算出法を述べる。

第4.3節では、局所的拡大率のゆらぎの特徴を定量化するための特性量として、動的構造関数⁽²⁵⁾を導入する。この動的構造関数による特徴抽出の有効性を第2.3.5節で述べたリアプノフ指数による結果との比較によって示し、これに基づいて、動的構造関数による解析結果の簡便な利用法を、統計力学的手法として提案する。

第4.4節においては、この統計力学的手法の一つの適用例として、周期性の強いカオスとその周期性を崩壊するカオス分岐である、バースト分岐の特徴抽出を考える。機械系力学モデル上のカオスにバースト分岐現象が存在することを数値的に示し、このバースト分岐の特徴が、動的構造関数上に如何に現われるかを示す。

第4.5節では、第4.4節での議論の有効性を具体例とともに検証する。第4.2節で議論した局所的拡大率の二つの算出法に対応して、運動方程式が未知である場合と、既知である場合の結果を比較検討し、最終的には1次元の時系列が既知ならば、バースト分岐の特徴抽出が可能であることを示す。

これを踏まえて、第4.6節では、より現実的な状況として、決定論的カオス時系列に装置ノイズが混入する場合を考え、このようなノイズ混入時の、統計力学的手法の有効性について考察する。

最後に、第4.7節においてこれらの結果をまとめる。

4.2 局所的拡大率

4.2.1 局所的拡大率

リアプノフ指数の時間的な局所量を局所的 (軌道) 拡大率と呼ぶ。この局所的拡大率は、ポアンカレ写像による点列を

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.1)$$

と表現したときに、次式で定義される。

$$\lambda(x_n, e_n) = \ln \frac{\|T(e_n)\|}{\|e_n\|}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.2)$$

ここに、 x_n は d 次元ベクトル、 e_n は x_n を始点とする任意の d 次元変分ベクトルとする。

ここに、 $\lambda(x_n, e_n)$ の e_n に関する最大値

$$\lambda_1(x_n) = \max_{e_n} \lambda(x_n, e_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.3)$$

を不安定多様体方向の局所的拡大率と呼ぶ。その長時間平均は、最大リアプノフ指数となる。

式 (4.3) では、最大の局所的拡大率を与えるものとして e_n を特定し、これに対応する不安定多様体方向の局所的拡大率を定義したが、一方で、 x_n の接空間の直交基底の時間発展を考慮する立場も存在する。多次元リアプノフ指数⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾は、 e_n の初期値として x_n の接空間の任意の直交基底をとり、各基底毎に求まる局所的拡大率の長時間平均を大きい順に並べたものである。

本章の取り扱いでは、式 (4.3) で定義した不安定多様体方向の局所的拡大率のみを考え、多次元リアプノフ指数⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾に見られるような、多次元の局所的拡大率は考慮しない。

不安定多様体方向の局所的拡大率は、ポアンカレ写像一回を経た、解軌道の近傍の拡大・縮小における、最大の拡大方向の拡大率を定量化するものである。不安定多様体方向の意味するところを図 4.1 に模式的に示す。

なお、以後の議論においては特に断らない限り、『局所的拡大率』を『不安定多様体方向の局所的拡大率』の意味で用いる。

4.2.2 運動方程式が既知である場合

富田ら⁽²⁵⁾が、連続時間系のカオスの動的構造関数を算出するために用いたような、対象の振動系の第一変分方程式を用いた局所的拡大率の算出法を以下に述べる。

次式で定義される d 次元の非線形ベクトル場を考える。

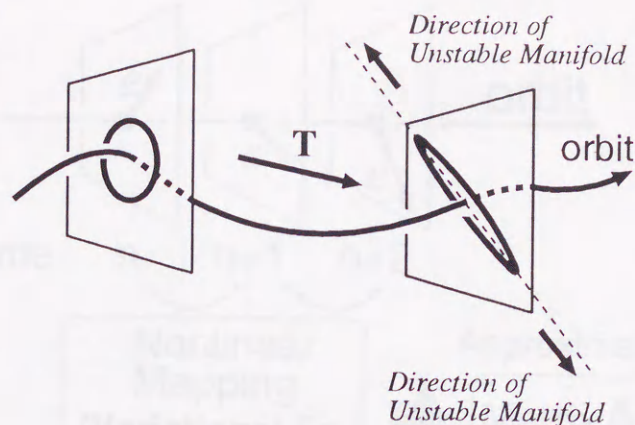


図 4.1: 不安定多様体方向

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (4.4)$$

ここに、 x は d 次元ベクトル、 f は時間 t に関して周期 τ を持つベクトル値関数とする。

このとき、離散時刻 $t_n = t_0 + n \cdot \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) によって、式(4.4)の解 $x(t)$ を離散化して得た点列を $x_n = x(t_n)$ とすれば、 x_n は式(4.1)のポアンカレ写像による点列となる。

ここで、式(4.3)における変分ベクトル e_n の時間発展を記述するために、次式で定義される、式(4.4)に関する第一変分方程式を用いる。

$$\dot{e} = D_x f(x)(e, t) \quad (4.5)$$

ここに $D_x f(x)$ は、関数 f の x に関するヤコビアンである。

式(4.5)の解 $e(t)$ から、先の離散時刻 t_n によって離散列 $e_n = e(t_n)$ を生成すれば、これを用いて、不安定多様体方向の局所的拡大率は、次式のように定義される。

$$\lambda_1(x_n) = \ln \frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.6)$$

ただし、数値的に $\lambda_1(x_n)$ の具体的な値を求める場合は、式(4.6)の解の発散を防ぐ必要がある。この場合の $\lambda_1(x_n)$ は以下の手順で求めることができる。

- 単位ベクトル e_0 を初期値として e_1 を算出し、 $\lambda_1(x_0) = \|e_1\| / \|e_0\|$ を得る。
- この e_1 の方向は保存したまま、 $e_1 / \|e_1\|$ なる規格化を経たものを次の初期値として e_2 を算出し、 $\lambda_1(x_1) = \|e_2\| / \|e_1\|$ を得る。
- 以上の手順を繰り返し、 e_3, e_4, \dots を順次求める。

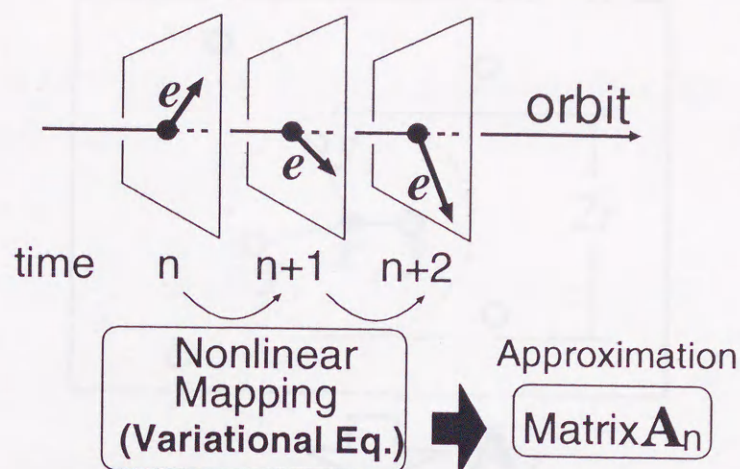


図 4.2: ベクトル場の線形近似

4.2.3 運動方程式が未知である場合

ここでは、局所的拡大率の算出にあたって、運動方程式が未知の場合を考える。

第 4.2.2 節で見たように、局所的拡大率の算出にあたっては、式 (4.5) で記述されるようなベクトル e の時間発展に関する情報が必要である。これを時系列から取り出すための準備として、図 4.2 に示すような、ポアンカレ写像 (式 (4.1)) の線形化

$$x_{n+1} \approx A_n \cdot x_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.7)$$

を考える。ここに A_n は、ポアンカレ写像 T による x_n 近傍のベクトル場の推移を記述する d 次元正方行列である。

式 (4.7) による線形化が有意であれば、変分ベクトル e_n の時間発展は、行列 A_n を用いて、

$$e_{n+1} = A_n \cdot e_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

と表現されるので、これから $\lambda_1(x_n)$ は

$$\lambda_1(x_n) = \ln \frac{\|A_n \cdot e_n\|}{\|e_n\|}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

のように求まる。

ここまでの議論によって、カオスの挙動の時系列から $\lambda_1(x_n)$ を求める問題は、カオスの挙動の時系列から行列 A_n を推定する問題に帰着した。

カオスの挙動の時系列から行列 A_n を推定するために、本研究では、以下に述べる方法⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾を用いる。

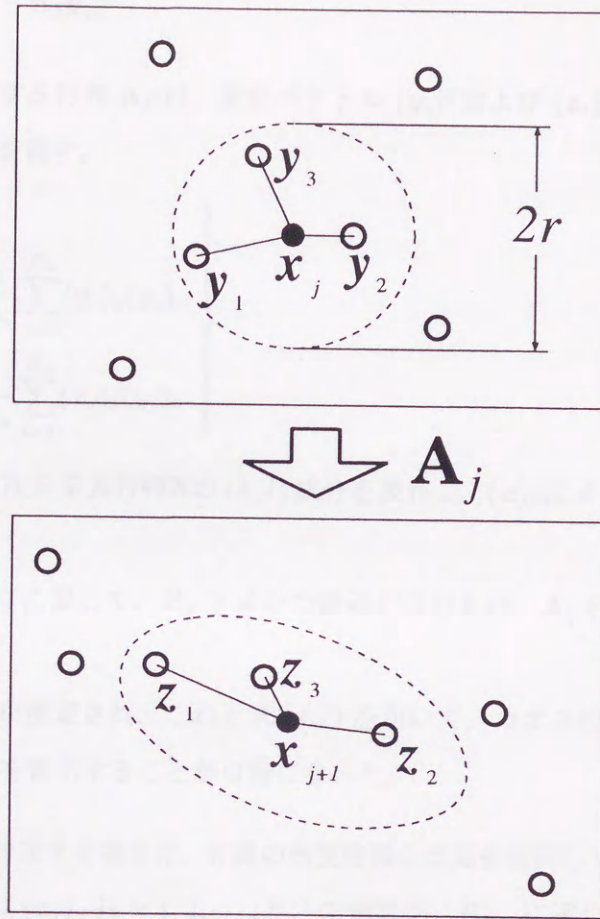


図 4.3: ポアンカレ写像による変位ベクトルの推移

いま、カオスの時系列 $\{x_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) が得られているとする。任意の点 x_j を選び、これを中心とする半径 r の小球内にある点の集合 $\{x_i\}_j$ ($i = 1, 2, \dots, B_n$) を考える。これらの変位ベクトルの集合を

$$\{y_i\}_j^j \equiv \{x_i - x_j \mid \|x_i - x_j\| < r\}, \quad (i = 1, 2, \dots, B_n) \quad (4.10)$$

と定義すれば、このときの T による $\{y_i\}_j^j$ の像は

$$\{z_i\}_j^j \equiv \{x_{i+1} - x_{j+1} \mid \|x_{i+1} - x_{j+1}\| < r\}, \quad (i = 1, 2, \dots, B_n) \quad (4.11)$$

となる。 $B_n = 3$ の場合の模式図を図 4.3 に示す。

ここで、 r が十分小さければ、 $\{y_i\}_j^j$ と $\{z_i\}_j^j$ の関係は式 (4.7) を用いて、

$$\{z_i\}_j^j = A_j \{y_i\}_j^j, \quad (i = 1, 2, \dots, B_n) \quad (4.12)$$

と書けるので、行列 A_j を推定するために、次式を満足するような最小二乗法を考えることができる。

$$\min_{\mathbf{A}_j} \sum_{i=1}^{B_n} \|\mathbf{z}_i - \mathbf{A}_j \mathbf{y}_i\|^2 \quad (4.13)$$

式(4.13)を満足する行列 \mathbf{A}_j は、変位ベクトル $\{\mathbf{y}_i\}^j$ および $\{\mathbf{z}_i\}^j$ に基づいて導出される、以下の方程式を満たす。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_j &= \mathbf{V}\mathbf{C} \\ (\mathbf{V})_{kl} &= \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{B_n} (\mathbf{y}_i)_k (\mathbf{y}_i)_l \\ (\mathbf{C})_{kl} &= \frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{B_n} (\mathbf{z}_i)_k (\mathbf{y}_i)_l \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

ここに、 $(\mathbf{X})_{kl}$ は d 次元正方行列 \mathbf{X} の (k, l) 成分を表わし、 $(\mathbf{x})_k$ は d 次元ベクトル \mathbf{x} の k 成分を表わす。

ここで、式(4.14)に関して、 $B_n \geq d$ かつ縮退がなければ、 \mathbf{A}_j ($j = 1, 2, \dots, N$) は一意に定まる。

以上で、行列 \mathbf{A}_j が推定され、これと式(4.7)を用いて、カオスの挙動の時系列から局所的拡大率 $\lambda_1(\mathbf{x}_n)$ を算出することが可能になった。

実際に行列 \mathbf{A}_j を推定する場合は、計算の所要時間の短縮を意図して、 B_n に最大値 B_{\max} を設け、検索対象の $\{\mathbf{x}_i\}_j$ ($i = 1, 2, \dots, B_n$) の個数が、 B_{\max} に達した時点で検索を打ち切ることが行なわれる⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。本研究においても、第4.5節以降の具体的な結果を得るときに、この検索打ち切りの手法を用いて計算時間の節約を図る。

4.3 統計力学的手法

4.3.1 粗視的拡大率

第 4.2 節において導入した局所的拡大率 $\lambda_1(x_n)$ の時間的なゆらぎの特徴は、動的構造関数と呼ばれる一連の関数群によって定量化できる。この動的構造関数の導出は、統計力学に求められる粗視的な量である粗視的拡大率に基づいて行なわれる。

いま、局所的拡大率 $\lambda_1(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) に基づいて、粗視的拡大率を次式で定義する。

$$\begin{cases} \Lambda_m(x_k) \equiv \frac{1}{m} \sum_{i \in D_k} \lambda_1(x_i) \\ D_k = \{k, k+1, \dots, k+(m-1)\} \end{cases} \quad (4.15)$$

ここに m は適当な粗視量、 D_k は添字の集合である。

D_k に関して、文献⁽²³⁾⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾に見られるような研究では、

$$D_i \cap D_j = \phi, \quad (i \neq j) \quad (4.16)$$

の条件を満足するようなとり方を採用している。ここに ϕ は空集合を表わす。

これに対して、本研究では、 x_n にエルゴード性を仮定し、 D_k を次のようにとる。

$$D_1, D_2, \dots, D_n, \dots \quad (4.17)$$

ここに、 $D_1 = \{1, 2, \dots, m\}$, $D_2 = \{2, 3, \dots, m+1\}$, \dots , $D_n = \{n, n+1, \dots, n+(m-1)\}$ である。

N 個のカオスの挙動の時系列から算出可能な局所的拡大率の数は、最大で $N-1$ であり、取得可能な総データ数が減少した場合、局所的拡大率の総数も制限される。第 5 章においては機械装置に発生する現実のカオスの挙動を扱うが、このような場合、必要なデータ数を無制限に生成することはできない。このことを考慮して、本研究では限られた局所的拡大率から、できるだけ多くの粗視的拡大率を得ることを意図して、第 4.5 節以降の粗視的拡大率の算出においては、集合のオーバーラップを認めた式 (4.17) のような D_k のとり方を採用する。

4.3.2 動的構造関数

以下に動的構造関数の定義⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾⁽²⁵⁾を述べる。

粗視的拡大率 $\Lambda_m(x_n)$ の確率密度関数を以下のように定義する。なお添字の m は粗視量 m に基づく量であることの表示である。

$$P(\Lambda; m) = \langle \delta(\Lambda_m(\mathbf{x}_n) - \Lambda) \rangle \quad (4.18)$$

ここに $\langle \cdot \rangle$ は長時間平均, $\delta(\cdot)$ はディラックのデルタ関数を表わす。

このとき, 確率密度関数 $P(\Lambda; m)$ が計量形

$$\left. \begin{aligned} P(\Lambda; m) &= P(\Lambda^\infty; m) \exp[-m\psi_m(\Lambda)] \\ \Lambda^\infty &= \langle \Lambda_m(\mathbf{x}_n) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

を持てば, これから次式のゆらぎのスペクトルが定義される。

$$\psi_m(\Lambda) = -\frac{1}{m} \ln \left[\frac{P(\Lambda; m)}{P(\Lambda^\infty; m)} \right] \quad (4.20)$$

ゆらぎのスペクトル $\psi_m(\Lambda)$ の特徴を抽出するために, $\psi_m(\Lambda)$ のグラフの傾きに着目した重み $q = 1 - d\psi_m(\Lambda)/d\Lambda$ を導入し, これによる分配関数を次式で定義する。

$$Z_m(q) = P(\Lambda^\infty; m) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-m\{\psi_m(\Lambda) + (q-1)\Lambda\}] d\Lambda \quad (4.21)$$

この分配関数に基づいて, $\Lambda_m(\mathbf{x}_n)$ の分布の特性量である, キュムulant $\Phi_m(q)$, 重み q の平均 $\Lambda_m(q)$, 重み q の分散 $\sigma_m(q)$, が以下のように定義される。

$$\Phi_m(q) = -\frac{1}{m} \ln[Z_m(q)] \quad (4.22)$$

$$\Lambda_m(q) = \frac{d\Phi_m(q)}{dq} \quad (4.23)$$

$$\sigma_m(q) = -\frac{d\Lambda_m(q)}{dq} \quad (4.24)$$

式 (4.20)~式 (4.24) の一連の関数を動的構造関数と呼ぶ。

動的構造関数の機能は, 確率密度関数 $P(\Lambda; m)$ の特異な分布を取り出すことである。ここでいう特異な分布とは, 粗くいえば, 誤差分布のような $\exp(-x^2)$ ではなく, $\exp(\pm x)$ のオーダを持つ分布のことであり, この特異な分布は, ゆらぎのスペクトル $\psi_m(\Lambda)$ における線形スロープとして現れる。この線形スロープの現れ方に, カオスの局所構造に関する情報が含まれる⁽²⁵⁾。

分配関数 $Z_m(q)$ およびそれらの特性量の役割は, この線形スロープの位置と傾きを, 変分原理

$$\Phi_m(q) = \min_{\Lambda} \{\psi_m(\Lambda) + (q-1)\Lambda\} \quad (4.25)$$

に基づいて検出することにある。例えば, 傾き s を持つ $\psi_m(\Lambda)$ 上の線形スロープは, 重み q の平均 $\Lambda_m(q)$ 上において, 図 4.4 に示すような, 座標 $1-s$ 上の垂線として表われる。すなわち, 重み q の平均 $\Lambda_m(q)$ は, ゆらぎのスペクトル $\psi_m(\Lambda)$ における Λ の分布を, $\psi_m(\Lambda)$ の傾きごとに並びかえる機能を持つ。

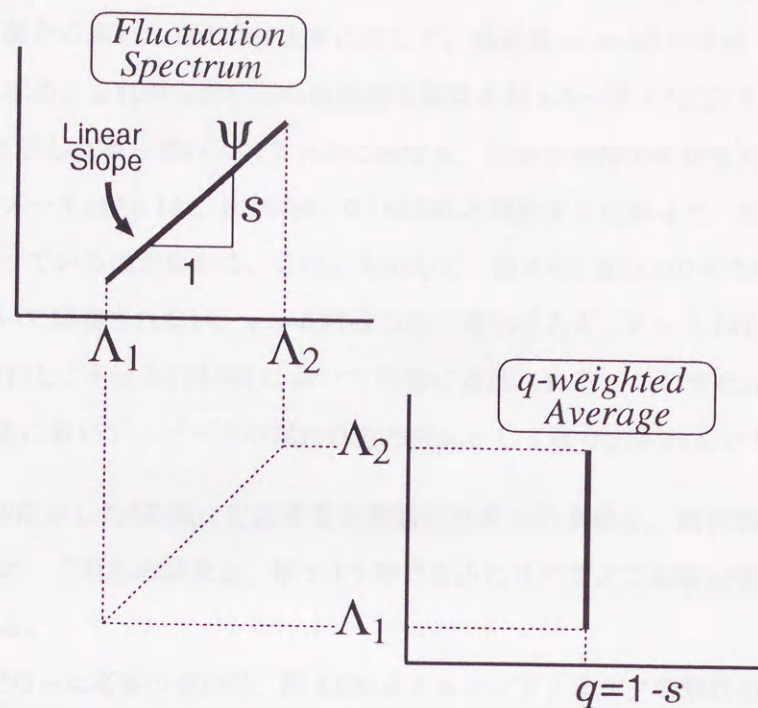


図 4.4: 線形スロープの検出

4.3.3 リアプノフ指数による結果との比較

第 4.3.2 節で導入した動的構造関数のカオス分岐現象の特徴抽出に対する有効性を見るために、van der Pol-Mathieu 系のカオス分岐を取り上げる。ここでは、リアプノフ指数の適用限界を示すために既に第 2.3.5 節において議論したものと、同一のカオスの挙動を取り上げる。これによって、リアプノフ指数の使用によって生じた困難が、動的構造関数の使用によって如何に解消されるかを見る。

ここでは、カオス分岐現象と動的構造関数との関係に関する詳細な議論は行わず、文献⁽²⁵⁾にみられる取り扱いを、図 2.9 に示した 3 種のカオスの挙動に対して、そのまま適用した結果を示す。したがって、局所的拡大率の算出には、第 4.2.2 節で述べた変分方程式による方法を用い、粗視的拡大率の算出には、オーバーラップを認めない式 (4.16) を満足する添字の集合を用いる。

式 (2.29) で定義した van der Pol-Mathieu 方程式に対する第一変分方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= (-1 + 3\beta\phi^2 - 2\alpha\phi\dot{\phi} - \delta \cos \omega t)\xi + (\gamma - \alpha\phi^2)\eta \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

この第一変分方程式と式 (2.29) を連立したものに対する、きざみ $2\pi/(100\omega)$ の RKG 法による数値解から求めた局所的拡大率に対して、粗視量 $m = 20$ の条件で 5000 点の粗視的拡大率を求め、これから算出した動的構造関数を図 4.5～図 4.7 に示す。

まず図 4.5 に示したゆらぎのスペクトルにおける、極小値近傍の形状を見てみる。コントロールパラメータ δ が 0.144, 0.14438, 0.144456 と増加するに伴って、形状の直線的な傾向が強くなっているのが分かる。これに対応して、図 4.6 の重み q の平均においては、 $\delta = 0.144$ において観察されない、 $q = 0$ 付近の値の落ち込みが、 $\delta = 0.14438$ で、僅かにその徴候を現わし、 $\delta = 0.144456$ において明確に確認される。この変化は、図 4.7 に示す重み q の分散において、ピークの現われ方の変化として取り出されている。

以上、図 2.9 に示した δ の値に対応する 3 種類のカオスの挙動を、動的構造関数によって特徴付けたが、これらの結果と、第 2.3.5 節で求めたリアプノフ指数の値との関係を比較検討してみる。

第 2.3.5 節で行った考察の要約は、図 2.9 のストレンジアトラクタの形状の類似性と、リアプノフ指数の値の類似性が一致しないという問題を生じる、というものであった。同様の考察を、図 4.7 に示す重み q の分散におけるピークの現われ方に基いて行ってみる。

図 4.7 の結果から明らかなように、類似した $\delta = 0.144, 0.14438$ のアトラクタに関して単一のピークを生じ、異なる形状を有する $\delta = 0.144456$ のアトラクタに対しては、2 個のピークを生じる結果が得られている。したがって、この動的構造関数による結果は、リアプノフ指数の値に着目した結果と異なり、van der Pol-Mathieu 系に発生したカオスの挙動の質的な変化によく対応している。このことから、カオス分岐現象の特徴抽出に、動的構造関数の利用が有効であることが分かる⁽¹⁸⁾。

この動的構造関数上のピークの生じ方を、原ら⁽²³⁾、富田ら⁽²⁴⁾⁽²⁵⁾は、 q -相転移と呼んで、その物理的解釈を試みているが、工学的な観点からカオス分岐現象の特徴抽出を行うだけならば、このピークのパターンにのみ着目することで十分であると判断し、著者らは、このピークのパターンの簡便な利用を、統計力学的手法として提案した⁽¹⁸⁾。

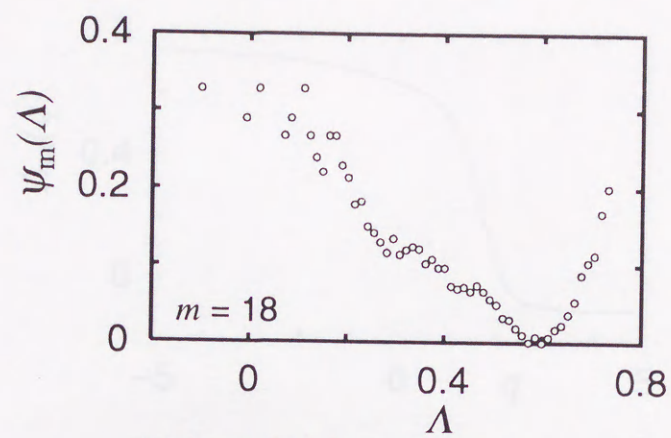
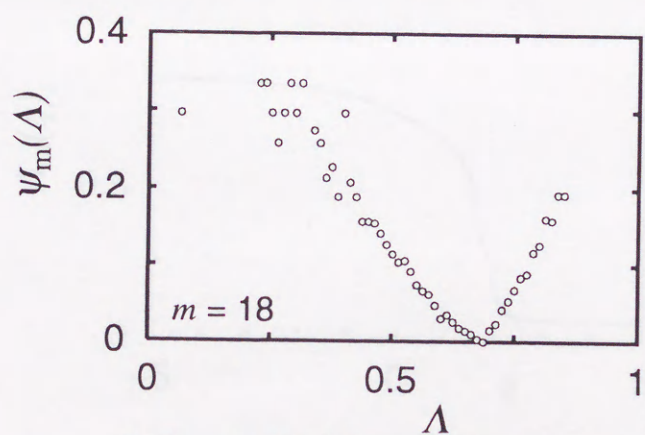
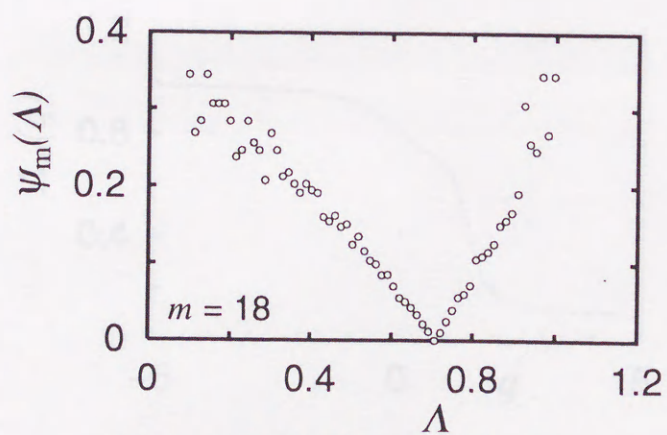
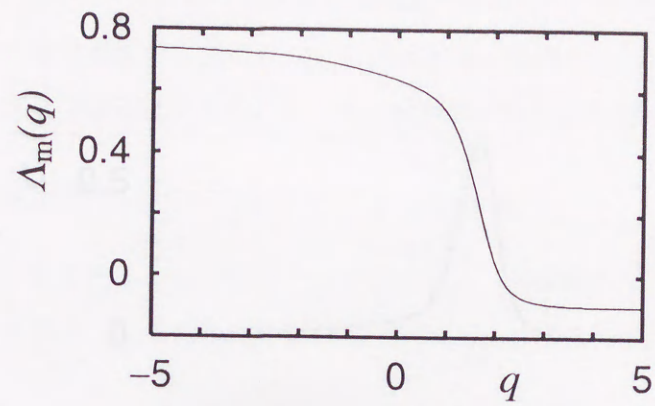
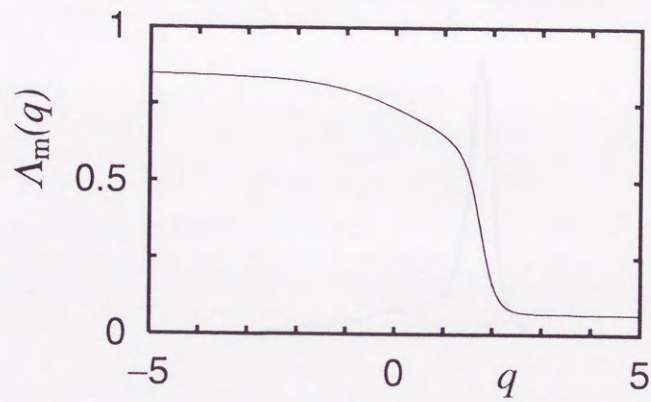
(a) $\delta = 0.144$, Liapunov Exponent = 0.54(b) $\delta = 0.14438$, Liapunov Exponent = 0.65(c) $\delta = 0.144456$, Liapunov Exponent = 0.67

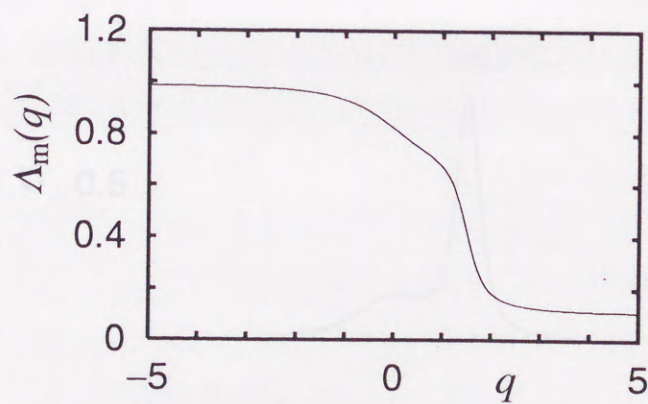
図 4.5: ゆらぎのスペクトル



(a) $\delta = 0.144$, Liapunov Exponent = 0.54

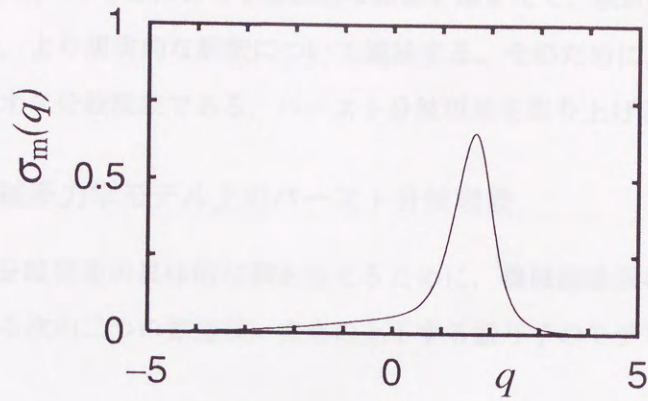
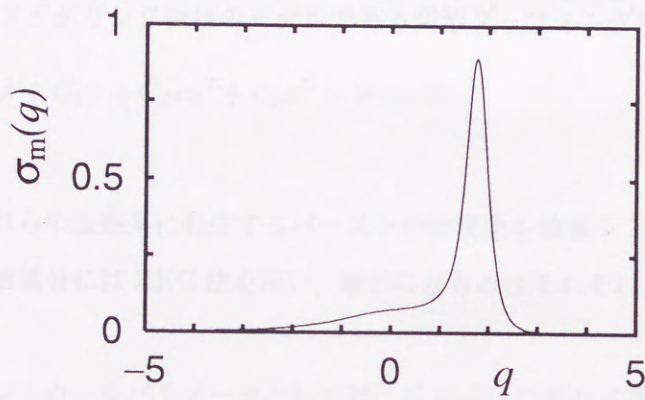
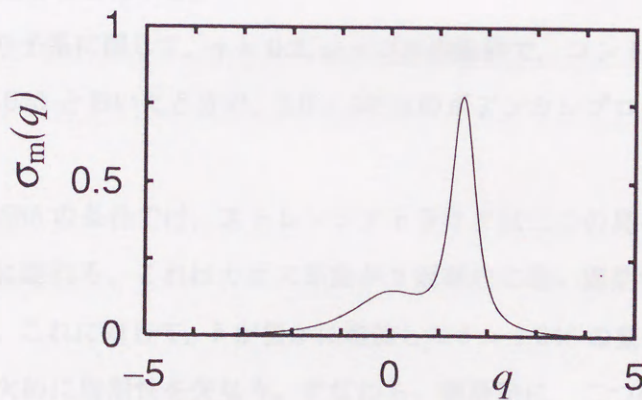


(b) $\delta = 0.14438$, Liapunov Exponent = 0.65



(c) $\delta = 0.144456$, Liapunov Exponent = 0.67

図 4.6: 重み q の平均

(a) $\delta = 0.144$, Liapunov Exponent = 0.54(b) $\delta = 0.14438$, Liapunov Exponent = 0.65(c) $\delta = 0.144456$, Liapunov Exponent = 0.67図 4.7: 重み q の分散

4.4 バースト分岐現象の特徴抽出

本節では、第 4.3.3 節における基礎的な結果を踏まえて、統計力学的手法によって得られた結果の、より現実的な解釈について議論する。そのために、より力学的な意味づけの明確なカオス分岐現象である、バースト分岐現象を取り上げる。

4.4.1 機械系力学モデル上のバースト分岐現象

バースト分岐現象の具体的な例を与えるために、機械振動系の力学モデルとして一般的と思われる次の二つの振動系、支点の上下する振り子のモデルである係数励振振り子形振動系

$$\ddot{\phi} + \gamma \dot{\phi} + [1 + 2b \cos \omega t] \sin \phi = 0 \quad (4.27)$$

および、スライダリンク機構のモデルである変形ダフティング形振動系

$$\ddot{x} + k \dot{x} + C_1 x + C_2 x \dot{x}^2 + C_3 x^3 = B \cos \Omega t \quad (4.28)$$

を考える。

以後、これらの振動系に発生するバースト分岐現象を数値シミュレーションにより再現するが、数値積分には RKG 法を用い、積分のきざみはそれぞれ、 $2\pi/(128\omega)$, $2\pi/(128\Omega)$ とした。

また、コントロールパラメータとしては、式 (4.27) の振り子系に関して励振振幅 b 、式 (4.28) のダフティング系に関して粘性減衰 k を選び、これらの微小な変化によるバースト分岐現象を見ることにする。

まず、振り子系に関して、 $\gamma = 0.2$, $\omega = 2.0$ の条件で、コントロールパラメータを $b = 1.044585$, 1.045 とおいたときの、 2.0×10^5 点のポアンカレプロットを図 4.8 および図 4.9 に示す。

$b = 1.044585$ の条件では、ストレンジアトラクタは二つの島を持ち、解軌道はこれらの島を交互に訪れる。これはカオス挙動が 2 周期的な強い周期性を有していることを表わしている。これに対して、 b が僅かに増加した $b = 1.045$ の条件では、この 2 周期的な挙動が、間欠的に周期性を失なう。すなわち、解挙動に、二つの島を交互に訪れるモードと、島の間を不安定にさまようモードが混在するようになる。これら 2 つのモード間を非周期的に推移するような挙動をバーストと呼ぶ。

このように、コントロールパラメータの僅かな変化によって、周期性の強いカオスの挙動が、その周期性を崩壊し、バーストの状態に推移する現象をバースト分岐と呼ぶ。

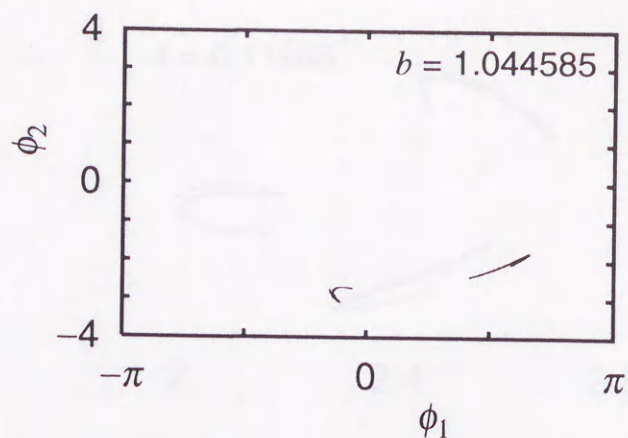


図 4.8: バースト分岐現象 (振り子系: バースト直前)

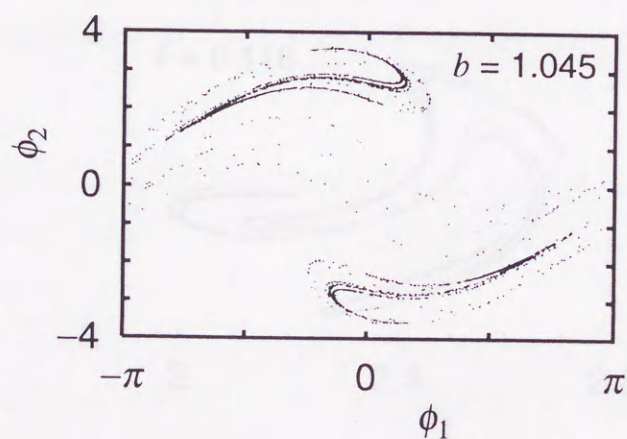


図 4.9: バースト分岐現象 (振り子系: バースト後)

同様のことをダuffing系について見てみる。式(4.28)のダuffing系に関して、 $C_1 = 1.0$, $C_2 = 0.2$, $C_3 = 0.08$, $B = 5.5$, $\Omega = 0.8$ の条件で、コントロールパラメータを $k = 0.11965, 0.118$ とおいたときの、 2.0×10^5 点のポアンカレプロットを図 4.10 および 図 4.11 に示す。

これらの図から、振り子系と同様、ダuffing系においても、バースト分岐現象が生じることが分かる。 $k = 0.11965$ において3周期的であるカオス的挙動は、 k が僅かに減少した $k = 0.118$ の条件において、その周期性を崩壊し、バーストの状態に推移している。

便宜上、以後の議論では、図 4.8 および 図 4.10 のようなバースト分岐前の周期性の強いストレンジアトラクタを、存在領域が制限 (confined) されていることから、confined アトラクタと呼び、図 4.8 および 図 4.10 のようなバースト状態にある周期性の崩壊し

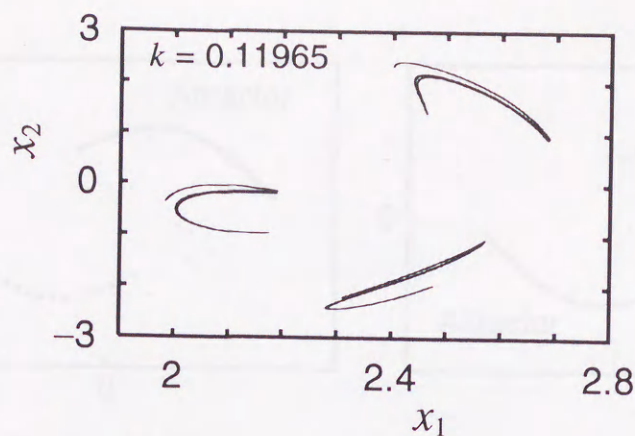


図 4.10: バースト分岐現象 (ダuffing系: バースト直前)

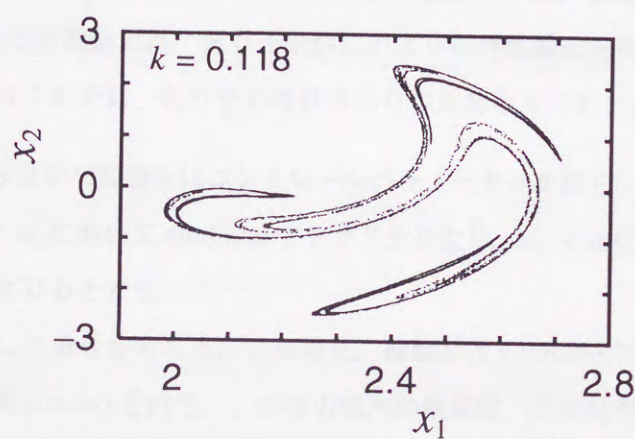


図 4.11: バースト分岐現象 (ダuffing系: バースト後)

たストレンジアトラクタを, ある島を訪れる位相 (phase) が確定しなくなることから, phase-unlocked アトラクタと呼ぶことにする。

4.4.2 バースト分岐現象の動的構造関数による表現

ここでは, 第 4.4.1 節において見たようなバースト分岐現象の特徴が, 動的構造関数上において如何なる形で現れるかについて明らかにする。

バースト分岐近傍のストレンジアトラクタの局所構造について, 次のような性質が知られている⁽²⁵⁾。

ここでは, 解釈の容易さを意図して, 図 4.12 のような対称性を有する仮想的な振動系のアトラクタを考える。実線は実際に存在するアトラクタ, 点線は潜在的に存在するアトラクタである。ここでは便宜上, 実線のアトラクタを単に『アトラクタ』, これと原点対称に潜在的に存在するアトラクタを『対称アトラクタ』と呼ぶことにする。対称に存

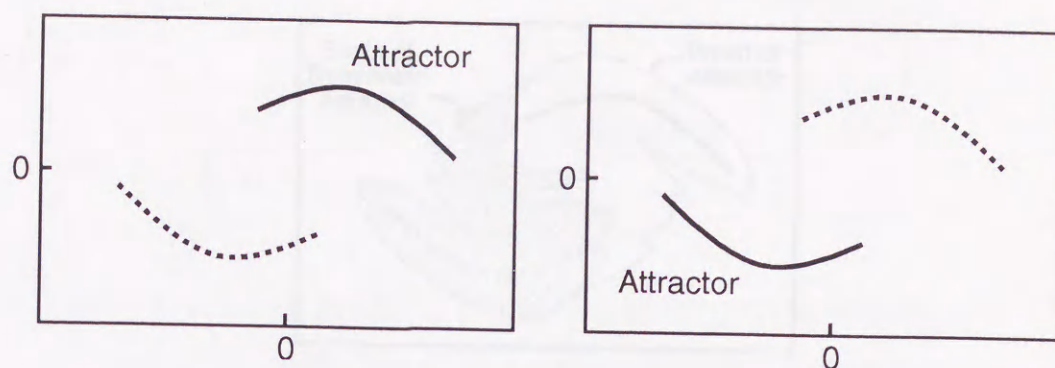


図 4.12: 対称構造におけるアトラクタ

在する二つのアトラクタのどちらが現象として現れるかは、初期値の選び方による。第 4.4.1 節における振動系では、振り子系がこのような対称構造を有しており、図 4.12 の左図および右図はそれぞれ、振り子の時計まわりの運動と反時計まわりの運動に相当する。

さて、この仮想的な振動系はコントロールパラメータ a を持ち、 a には臨界点 a_w が存在していて、 $a < a_w$ において confined アトラクタを生じ、 $a_w < a$ において phase-unlocked アトラクタを生じるとする。

まず、 $a < a_w$ の場合を考える。この場合、振動系は confined アトラクタを持つ。アトラクタは吸引域 (basin) を持ち、この吸引域内の軌道は、有限時間内にアトラクタ上に吸引される。同様に対称アトラクタも吸引域を有する。 $a < a_w$ の場合の confined アトラクタは図 4.13 に示すように、自らの吸引域に完全に含まれた形で存在する。

a の値が増加し、 $a = a_w - 0$ の臨界状態に近づくと、confined アトラクタは、図 4.14 に示すように、自らの存在領域を拡大し対称アトラクタの吸引域と接するようになる。

この場合も、confined アトラクタ自身は自らの吸引域内にあるので、バーストの状態への推移はみられず、形状も confined アトラクタのままである。

挙動の大きな変化は、 a が臨界点を越えた、 $a_w < a$ のときに生じる。このとき、図 4.15 に示すように、アトラクタの拡大は対称アトラクタの吸引域に達し、自らの吸引域から大きくはじき出される。このとき振動系は一種の過渡状態に陥り、解軌道はアトラクタと対称アトラクタの間の領域を不規則に推移する。これがバーストの状態である。

以上の議論は、図 4.10 および図 4.11 のような対称構造を持たないアトラクタのバースト分岐にもそのまま適用可能である。この場合は、図 4.10 の 3 周期の島それぞれの吸引域に、他のアトラクタが突出することで、図 4.11 のようなバーストが生じる。

以上、バースト分岐点近傍のストレンジアトラクタの局所構造の変化について見た。

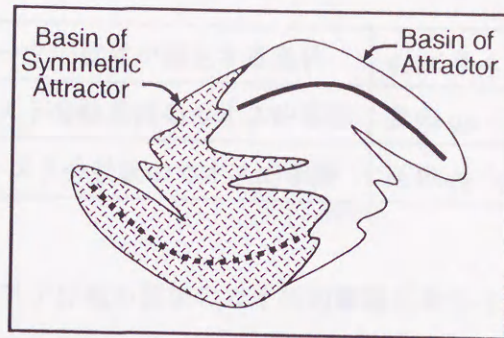


図 4.13: バースト分岐以前のアトラクタ

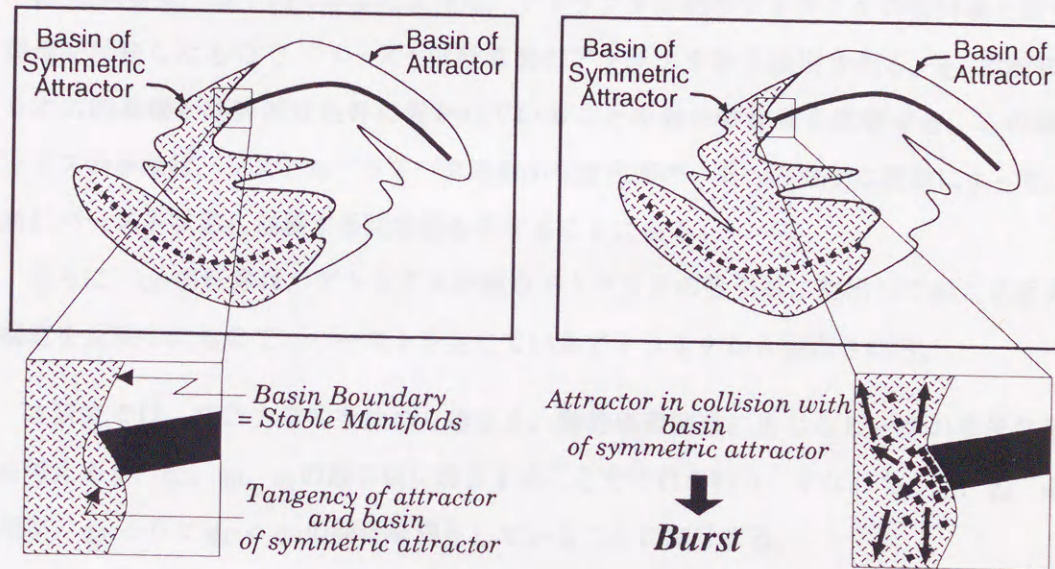


図 4.14: バースト分岐直前のアトラクタ

図 4.15: バースト分岐後のアトラクタ

このようなストレンジアトラクタの局所構造の変化が、動的構造関数に如何に反映されるかを、図 4.16 および図 4.17 に示す。

バースト直前のアトラクタに対しては、図 4.16 に示すように、ゆらぎのスペクトル $\psi_m(\Lambda)$ の極小値近傍に、 s_α と s_β の二つの線形スロープが生じ、これの位置と傾きが重み q の平均 $\Lambda_m(q)$ に検出され、これが、重み q の分散 $\sigma_m(q)$ において、 $q = q_\alpha, q_\beta$ におけるピークとなる。同様に、バースト直後のアトラクタに対しては、図 4.17 に示すように、 s_α と s_δ の二つの線形スロープが生じ、これによって、重み q の分散 $\sigma_m(q)$ に $q = q_\alpha, q_\delta$ でのピークが生じる。

これらのピークの発生を q -相転移という。各線形スロープ $s_\alpha, s_\beta, s_\delta$ に対応した相転移を、 q_α -相転移、 q_β -相転移、 q_δ -相転移と呼ぶ⁽²⁵⁾。

まず、 q_α -相転移は、全てのストレンジアトラクタが有するホモクリニック構造に対応

表 4.1: 統計力学的手法によるバースト分岐現象の表現

ピークの位置が満足する条件	$q_\beta < 0 < q_\delta < q_\alpha$
バースト分岐直前のカオスの挙動	負の q_β
バースト分岐後のカオスの挙動	正の q_δ ($q_\delta < q_\alpha$)

するものであり、バースト分岐の前後のカオスの挙動に対して共通に存在している。図 4.13 に示したような、構造安定なバースト分岐以前のアトラクタに対しては、この q_α -相転移のみが検出される。

q_β -相転移は、図 4.15 に示したような、アトラクタが他のアトラクタの吸引域と接する構造を反映したもので、バースト分岐直前のアトラクタから検出される。 q_β -相転移は、カオスの挙動が臨界的な条件に置かれていることを表わす指標と見做せる。この場合、カオスの挙動は、システムパラメータの微小な変化等の、系への微小な摂動によって、容易にバースト状態に推移する可能性を有することになる。

さらに、 q_δ -相転移は、アトラクタが他のアトラクタの吸引域に突出して起こる反発の構造を反映したもので、バーストを生じているアトラクタから検出される。

本研究では、統計力学的手法の立場から、動的構造関数に生じるピークの簡便な利用を考えるが、 q_α , q_β , q_δ の取る値に着目することでそれを行う。すなわち、 q_α , q_β , q_δ の値が、 $q_\beta < 0 < q_\delta < q_\alpha$ の関係を満足していることに着目する。

この関係を用いれば、表 4.1 に示すような、バースト分岐現象に関する簡便な指標が定義可能である。特に負の q_β は、カオスの挙動を生じている系が、臨界的な条件にあることを表現しているので、負の q_β の条件は、挙動の激変の可能性を見積るための指標として重要である。

これ以後のバースト分岐現象の特徴抽出は、表 4.1 に示す条件に基づいて行う。

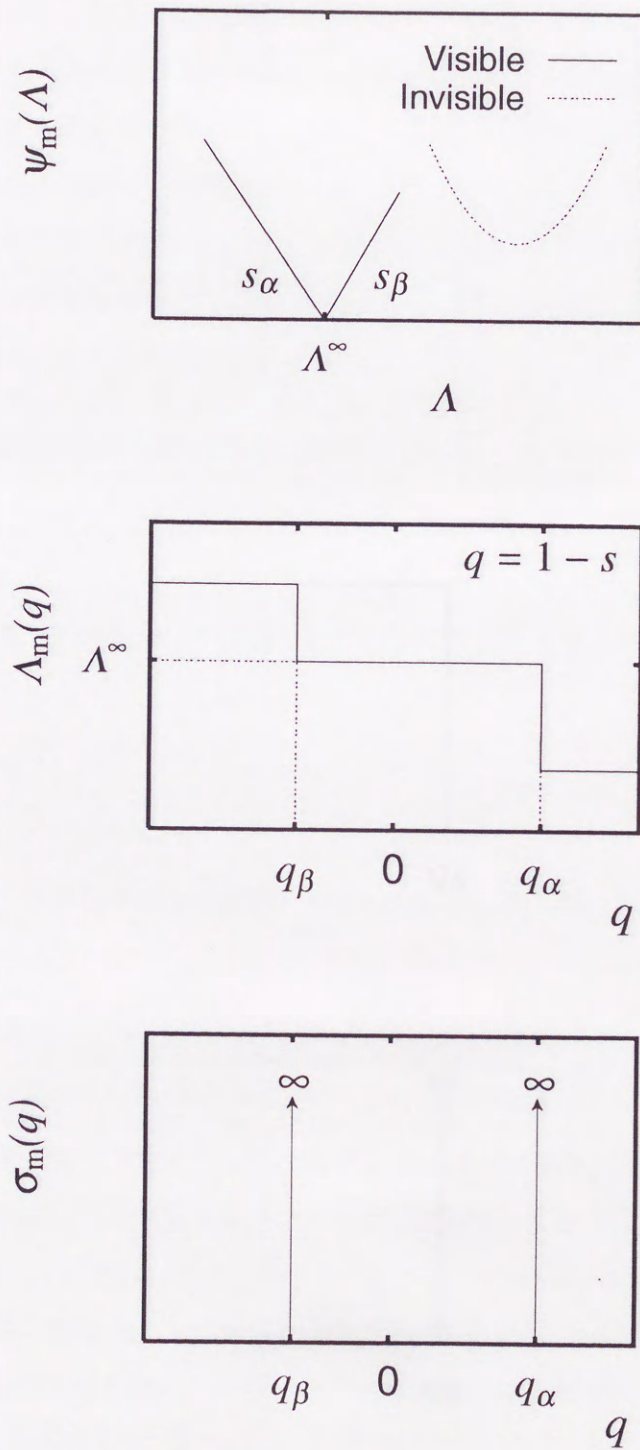


図 4.16: 動的構造関数 ($a = a_w - 0$: バースト分岐直前)

4.5. 数値例

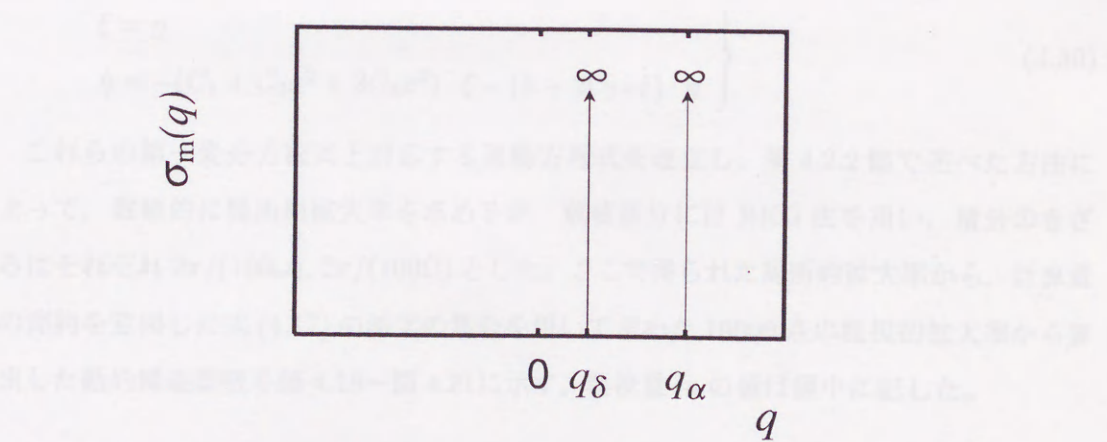
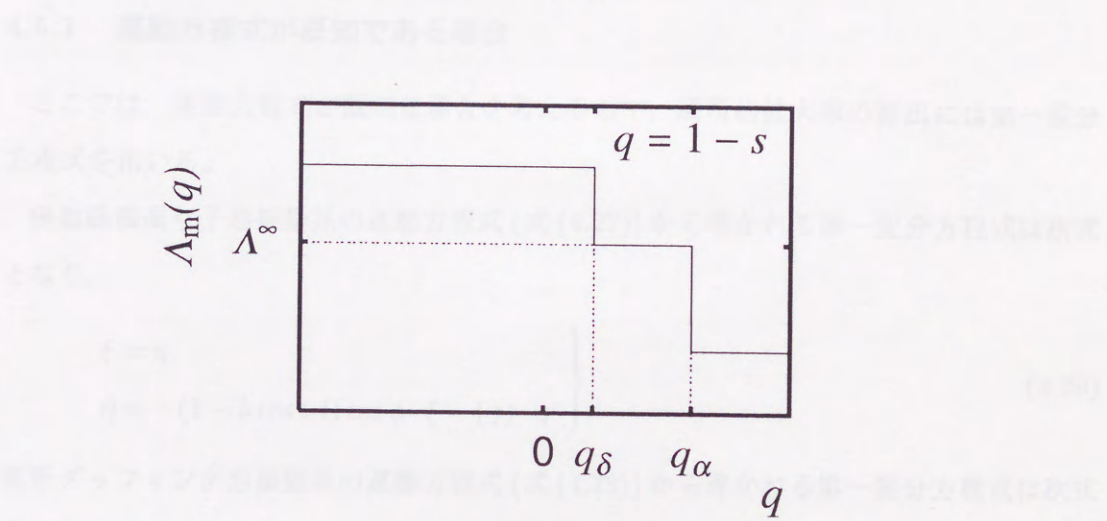
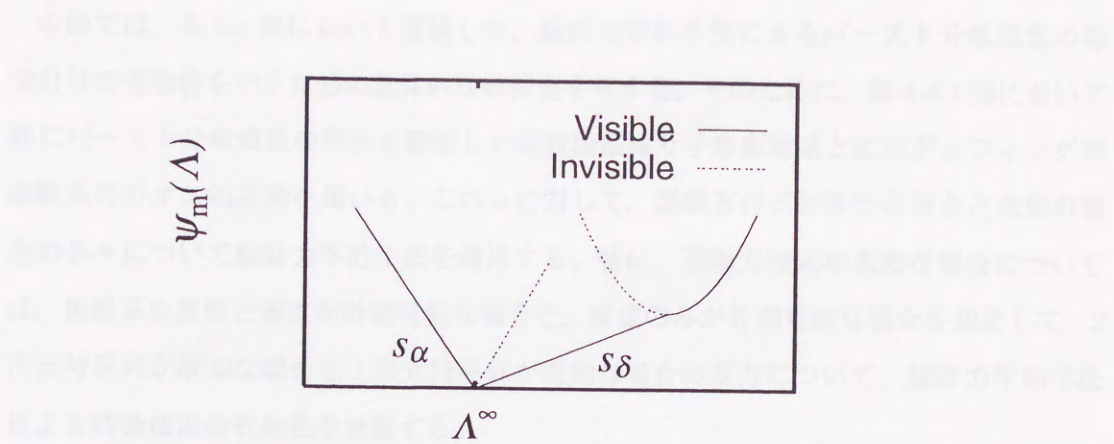


図 4.17: 動的構造関数 ($a > a_w$: バースト分岐後)

4.5 数値例

本節では、第 4.4 節において議論した、統計力学的手法によるバースト分岐現象の特徴付けの有効性を示すための具体的な数値例を与える。そのために、第 4.4.1 節において既にバースト分岐現象の発生を確認した係数励振振り子形振動系と変形ダッシング形振動系のカオス的挙動を用いる。これらに対して、運動方程式が既知の場合と未知の場合の各々について統計力学的手法を適用する。特に、運動方程式が未知な場合については、振動系の変位と速度が計測可能な場合と、変位のみが計測可能な場合を想定して、2次元時系列が既知な場合と1次元時系列が既知な場合の双方について、統計力学的手法による特徴抽出の有効性を検証する。

4.5.1 運動方程式が既知である場合

ここでは、運動方程式が既知な場合を考えるので、局所的拡大率の算出には第一変分方程式を用いる。

係数励振振り子形振動系の運動方程式(式(4.27))から導かれる第一変分方程式は次式となり、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -(1 - b \cos \omega t) \cos \phi \cdot \xi - (\gamma) \cdot \eta \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

変形ダッシング形振動系の運動方程式(式(4.28))から導かれる第一変分方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -(C_1 + C_2 \dot{x}^2 + 3C_3 x^2) \cdot \xi - (k + 2C_2 x \dot{x}) \cdot \eta \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

これらの第一変分方程式と対応する運動方程式を連立し、第 4.2.2 節で述べた方法によって、数値的に局所的拡大率を求めるが、数値積分には RKG 法を用い、積分のきざみはそれぞれ $2\pi/(100\omega)$, $2\pi/(100\Omega)$ とした。ここで得られた局所的拡大率から、計算量の節約を意図した式(4.17)の添字の集合を用いて求めた 10000 点の粗視的拡大率から算出した動的構造関数を図 4.18～図 4.21 に示す。粗視量 m の値は図中に記した。

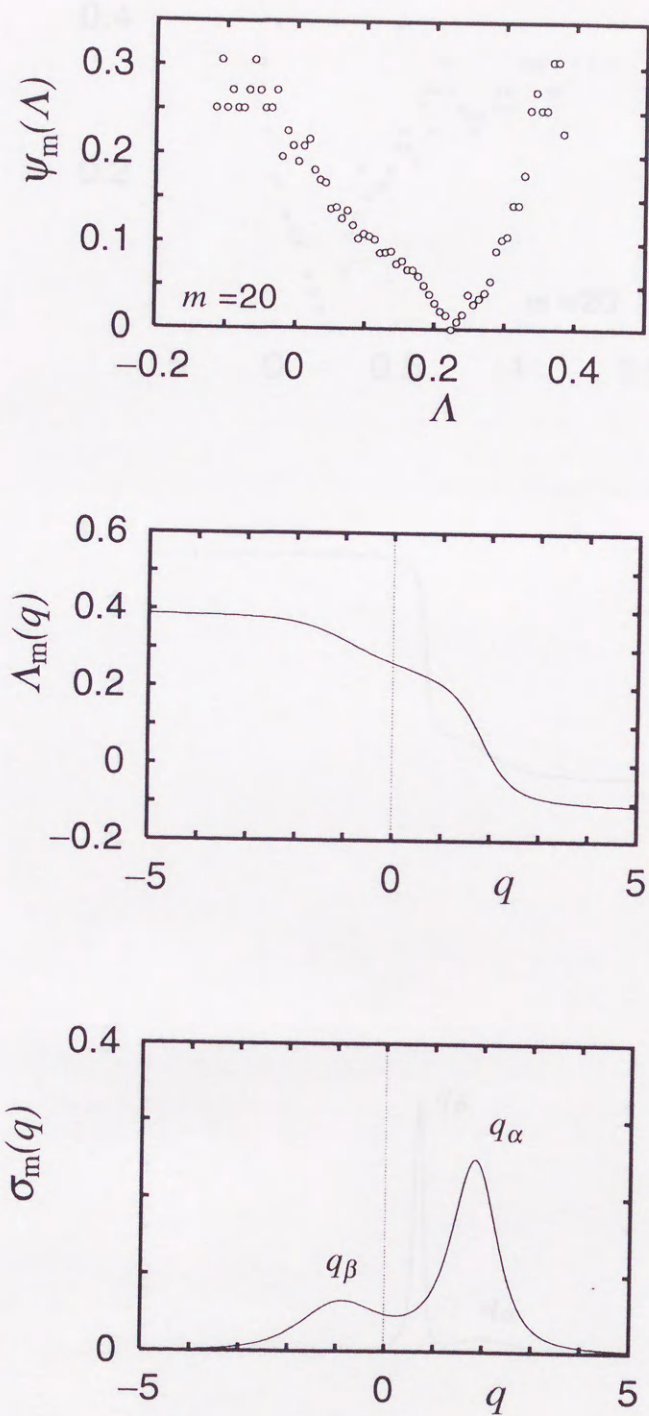


図 4.18: 変分方程式による動的構造関数 (振り子系: バースト直前)

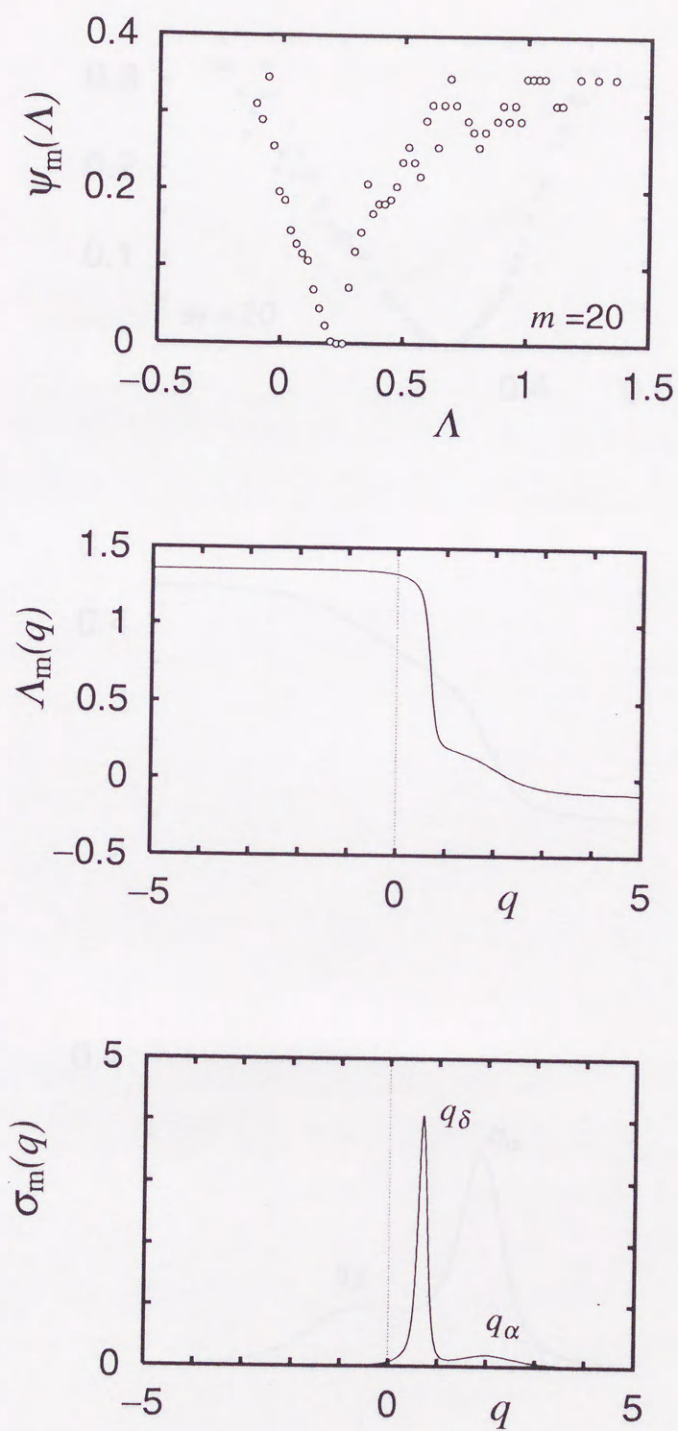


図 4.19: 変分方程式による動的構造関数 (振子系统: バースト後)

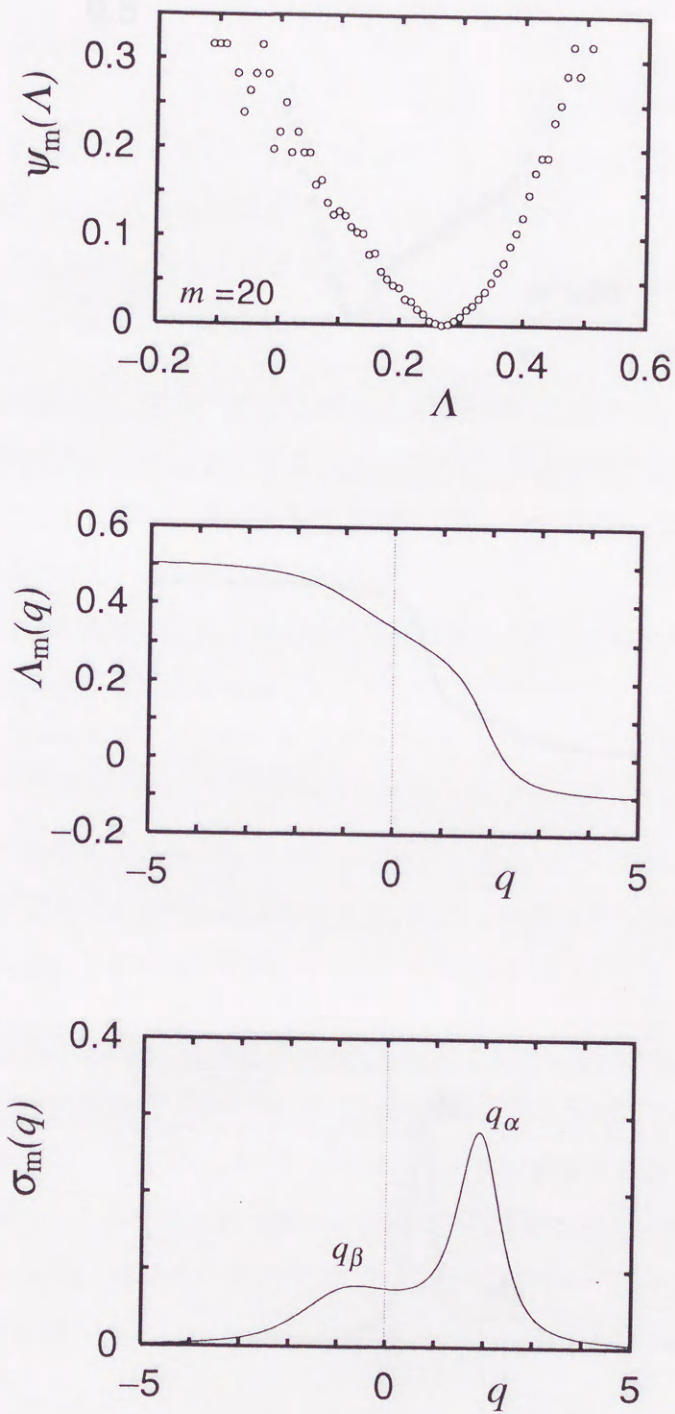


図 4.20: 変分方程式による動的構造関数 (ダuffing系: バースト直前)

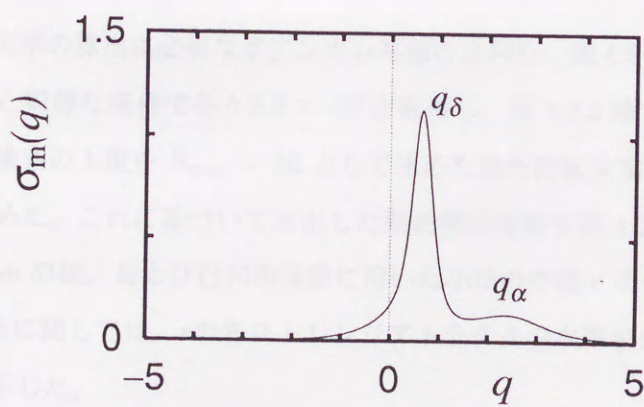
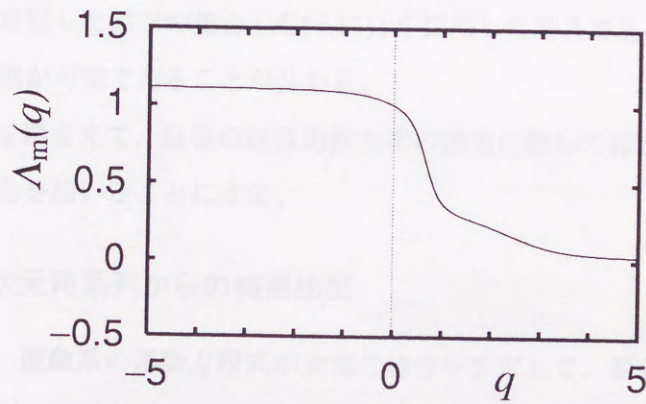
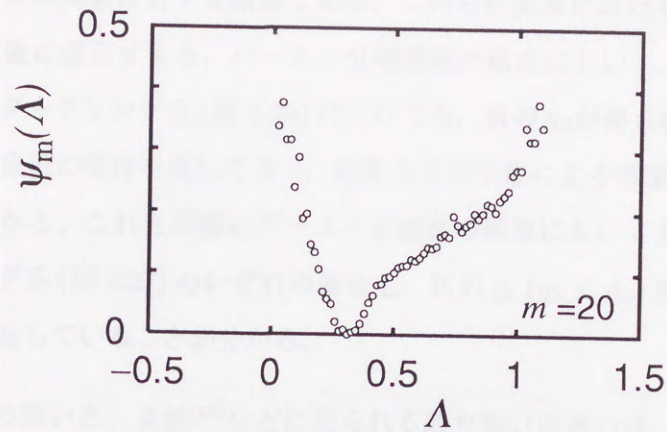


図 4.21: 変分方程式による動的構造関数 (ダッキング系: バースト後)

図 4.18 および図 4.19 は、図 4.8 および図 4.9 に示した振り子系のバースト分岐現象に対する結果であり、図 4.20 および図 4.21 は、図 4.10 および図 4.11 に示したダuffing 系のバースト分岐現象に対する結果である。これらの結果における重み q の分散 $\sigma_m(q)$ のピークの位置に着目すると、バースト分岐直前の結果において、振り子系 (図 4.18) についても、ダuffing 系 (図 4.20) についても、負の q_β が得られており、表 4.1 に示したバースト直前の条件を満たしており、統計力学的手法による特徴抽出がよく為されていることが分かる。これと同様にバースト分岐後の結果においても、振り子系 (図 4.19)、ダuffing 系 (図 4.21) のいずれの場合も、正の q_δ ($q_\delta < q_\alpha$) が得られており、表 4.1 の条件を満足していることが分かる。

以上の取り扱いと、文献⁽²⁵⁾などに見られる取り扱いの違いは、第 4.3.1 節で述べた粗視的拡大率の算出に際する添字の集合の取り方にある。本節で得られた結果から、計算量の節約を意図した添字の集合 (式 (4.17)) を採用した場合でも、十分に動的構造関数による特徴抽出が可能であることが分かる。

この結果を踏まえて、以後の粗視的拡大率の算出に際してはすべて、式 (4.17) に示した添字の集合を用いることにする。

4.5.2 2次元時系列からの特徴抽出

ここでは、振動系の運動方程式が未知な場合を想定して、振動の変位と速度、すなわち振動の位相面軌道が既知な場合を考える。実際に必要なデータは、この位相面軌道のポアンカレ写像による点列である。

局所的拡大率の算出に必要なポアンカレ写像の点列を、図 4.8～図 4.11 のポアンカレ写像を得たのと同様な条件で各々 2.0×10^5 点取得し、第 4.2.3 節で示した行列の推定による方法で、検索の上限を $B_{\max} = 20$ として求めた局所的拡大率から、10000 点の粗視的拡大率を求めた。これに基づいて算出した動的構造関数を図 4.22～図 4.25 に示す。図中に、粗視量 m の値、および行列の推定に用いた小球の半径 r の値を記す。ただし、小球の半径 r の値に関しては、 r の各ストレンジアトラクタの水平成分の分布に対する百分率 r_p として表示した。

第 4.5.1 節と同様、重み q の分散 $\sigma_m(q)$ に現れるピークの位置に着目すると、振り子系 (図 4.18、図 4.19)、ダuffing 系 (図 4.20、図 4.21) のいずれの場合も、バースト分岐直前に対して負の q_β 、バースト分岐後に対して正の q_δ ($q_\delta < q_\alpha$) が得られており、表 4.1 の条件を満足していることが分かる。

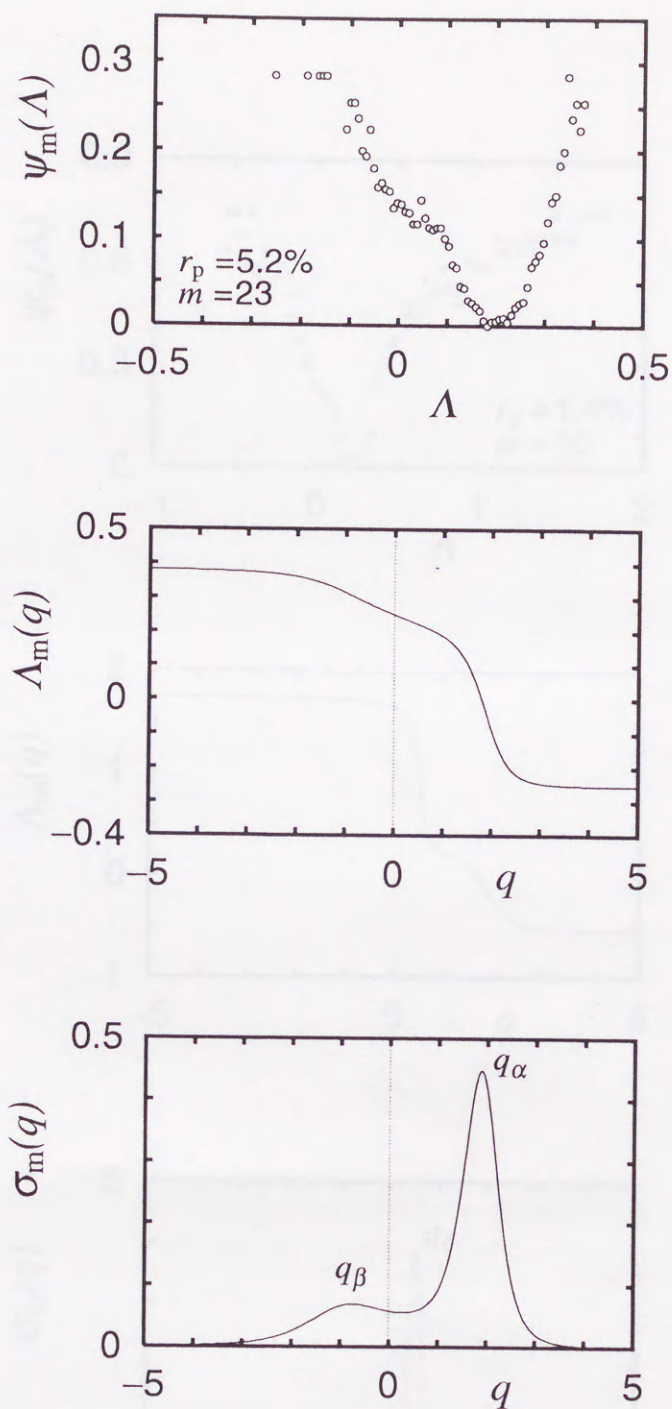


図 4.22: 2次元時系列からの動的構造関数 (振り子系: バースト直前)

以上の結果から、振動系の運動方程式が未知であっても、その2次元時系列であるポアンカレ写像が既知ならば、統計力学的手法によるバースト分岐現象の特徴抽出が可能であることが明らかとなった。

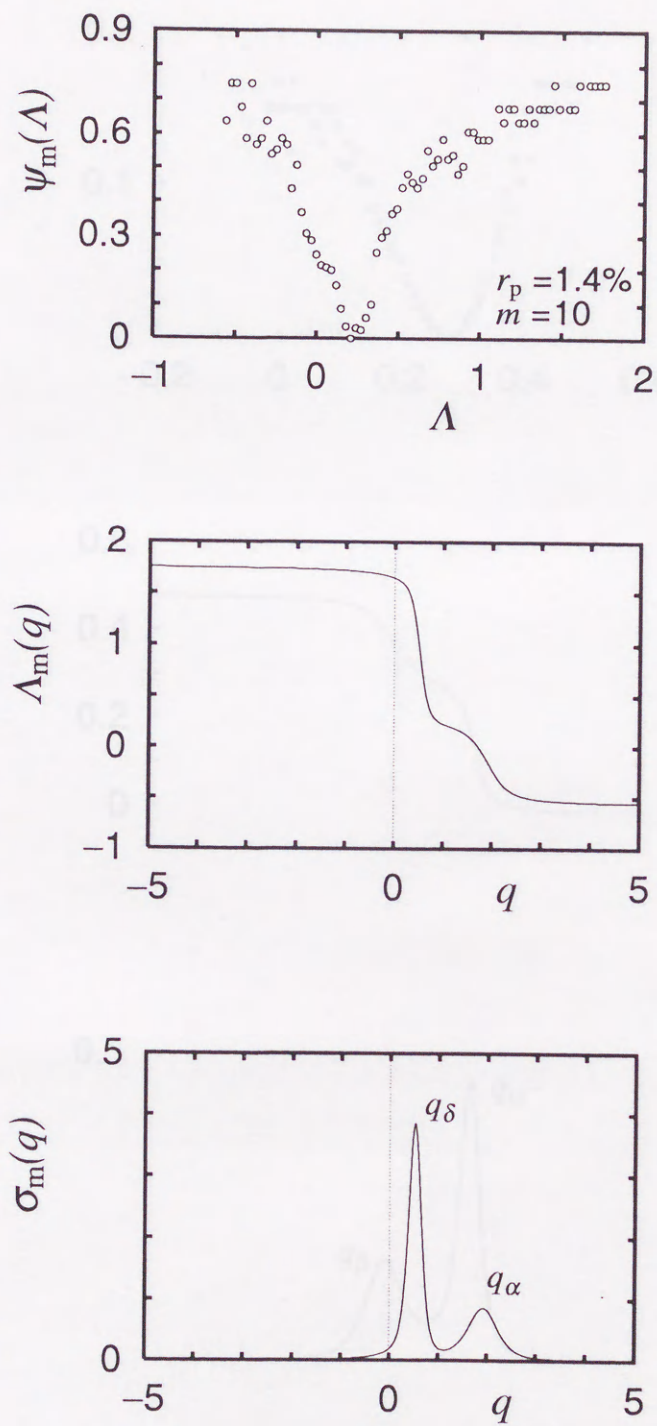


図 4.23: 2次元時系列からの動的構造関数 (振子系统: バースト後)

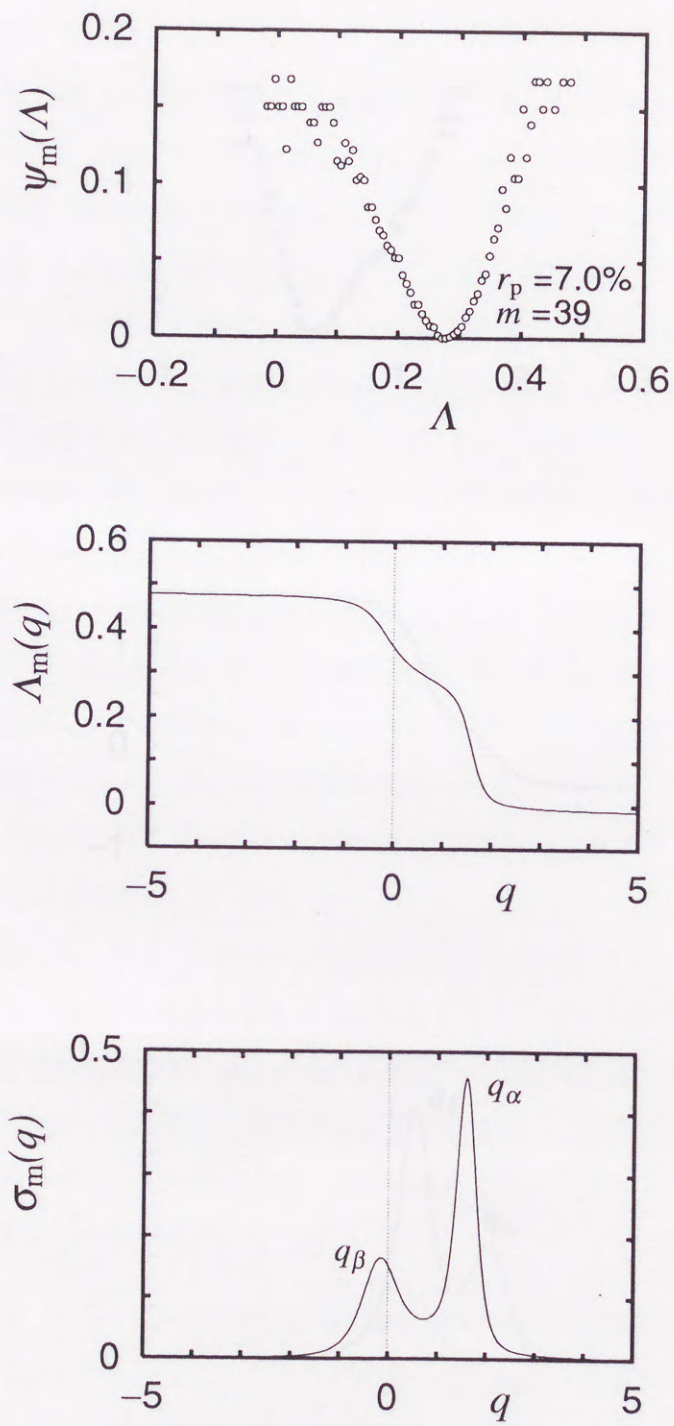


図 4.24: 2次元時系列からの動的構造関数 (ダフティング系: バースト直前)

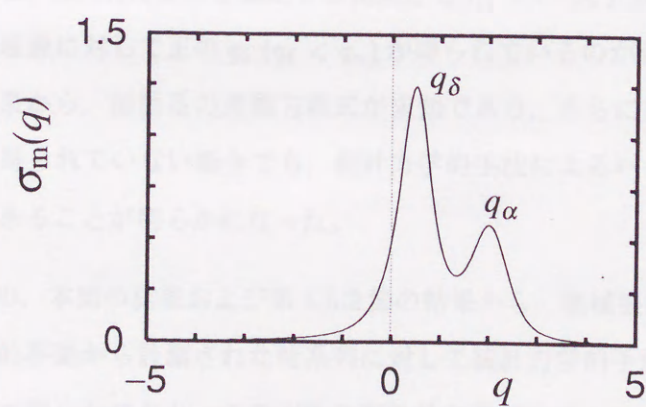
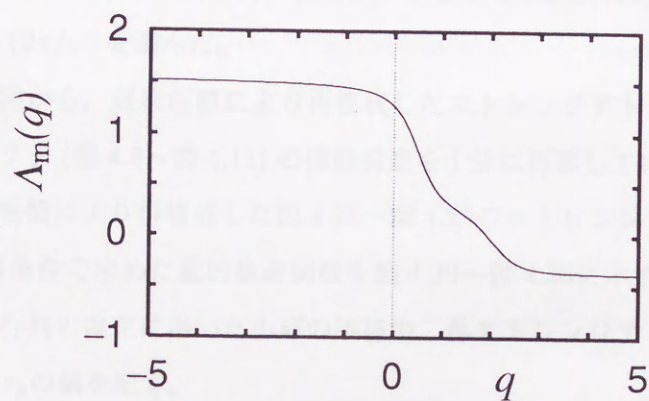
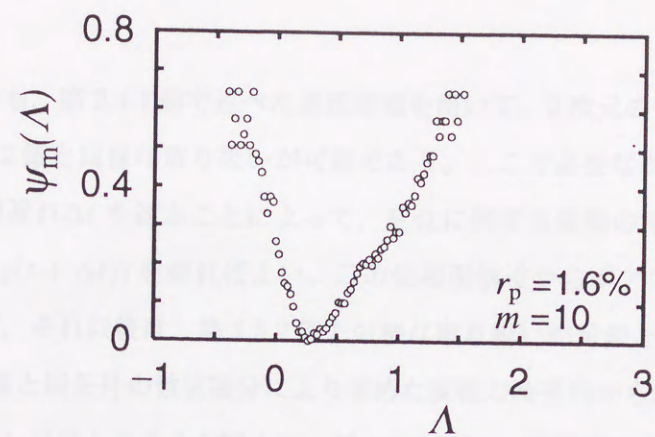


図 4.25: 2次元時系列からの動的構造関数(ダフフィング系: バースト後)

4.5.3 1次元時系列からの特徴抽出

ここでは、振動系の運動方程式が未知で、さらに振動の変位のみが計測可能な場合を考える。

この場合も、第 2.4.1 節で述べた遅延座標を用いて、2次元の位相面軌道を再構成すれば、第 4.5.2 節と同様な取り扱いが可能である。ここで必要な次元は2次元であるので、適当な時間遅れ Δt を選ぶことによって、変位に関する振動の時系列 $y(t)$ から、位相面軌道 $(y(t), y(t + \Delta t))$ を得ればよい。この位相面軌道からポアンカレ写像による点列を取得すれば、それ以後は、第 4.5.2 節と同様な取り扱いが可能となる。

第 4.4.1 節と同条件の数値積分により求めた変位の時系列から遅延座標によって再構成したストレンジアトラクタを図 4.26～図 4.29 に示す。時間遅れ Δt の値は、振り子系に関して励振の周期の $2/5$ 、 $\Delta t = 0.4 \cdot (2\pi/\omega)$ 、ダuffing系に対して外力の周期の $1/20$ 、 $\Delta t = 0.05 \cdot (2\pi/\omega)$ を選んだ。

これらの図から、遅延座標により再構成したストレンジアトラクタが、本来のストレンジアトラクタ (図 4.8～図 4.11) の位相構造を十分に再現していることが分かる。

この遅延座標により再構成した図 4.26～図 4.29 のストレンジアトラクタに対して、第 4.5.2 節と同条件で求めた動的構造関数を図 4.30～図 4.33 に示す。図中に、粗視量 m の値、および行列の推定に用いた小球の半径の、各ストレンジアトラクタの水平分布に対する百分率 r_p の値を記す。

これらの図から、第 4.5.1 節の変分方程式によるものや第 4.5.2 節の2次元時系列からのものと同様、表 4.1 の条件を満足する結果として、バースト分岐直前に対して負の q_β 、バースト分岐後に対して正の q_δ ($q_\delta < q_\alpha$) が得られているのが分かる。

以上の結果から、振動系の運動方程式が未知であり、さらに振動の変位に関する時系列のみしか得られていない場合でも、統計力学的手法によるバースト分岐現象の特徴抽出が可能であることが明らかになった。

ここまでの、本節の結果および第 4.5.2 節の結果から、機械振動系などの、実システム上のカオス的挙動から計測された時系列に対して統計力学的手法を適用するための、具体的な方法が明らかになり、この方法の有効性が数値シミュレーションによって実証された。

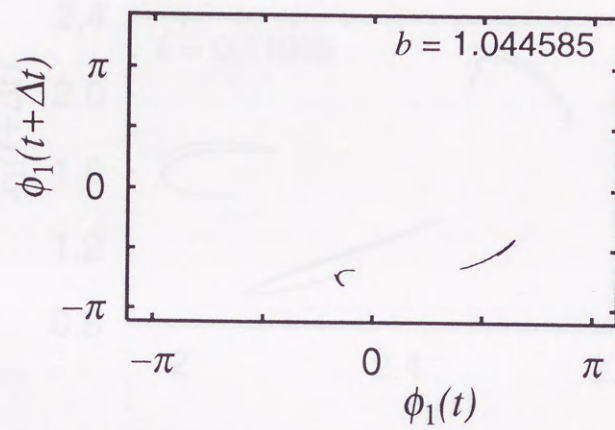


図 4.26: 遅延座標によるストレンジアトラクタ (振り子系: バースト直前)

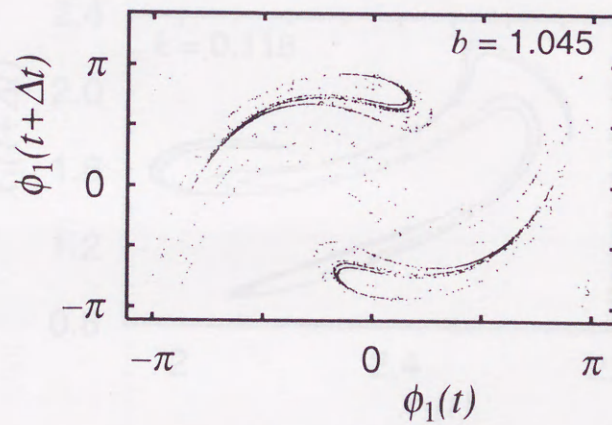


図 4.27: 遅延座標によるストレンジアトラクタ (振り子系: バースト直後)

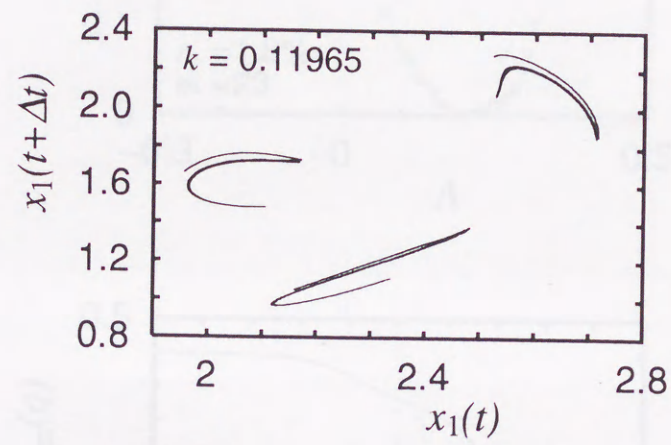


図 4.28: 遅延座標によるストレンジアトラクタ (ダuffing系: バースト直前)

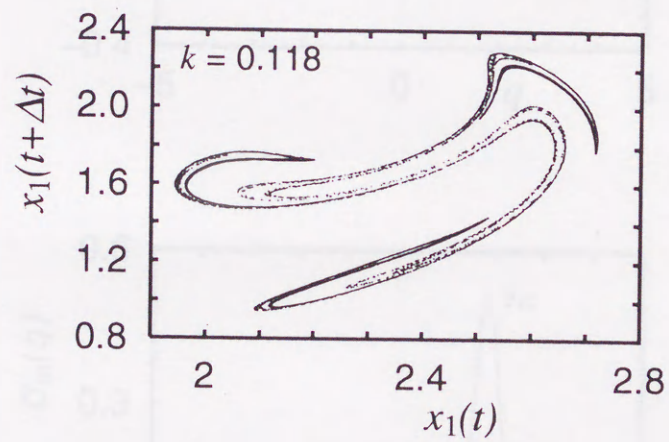


図 4.29: 遅延座標によるストレンジアトラクタ (ダuffing系: バースト直後)

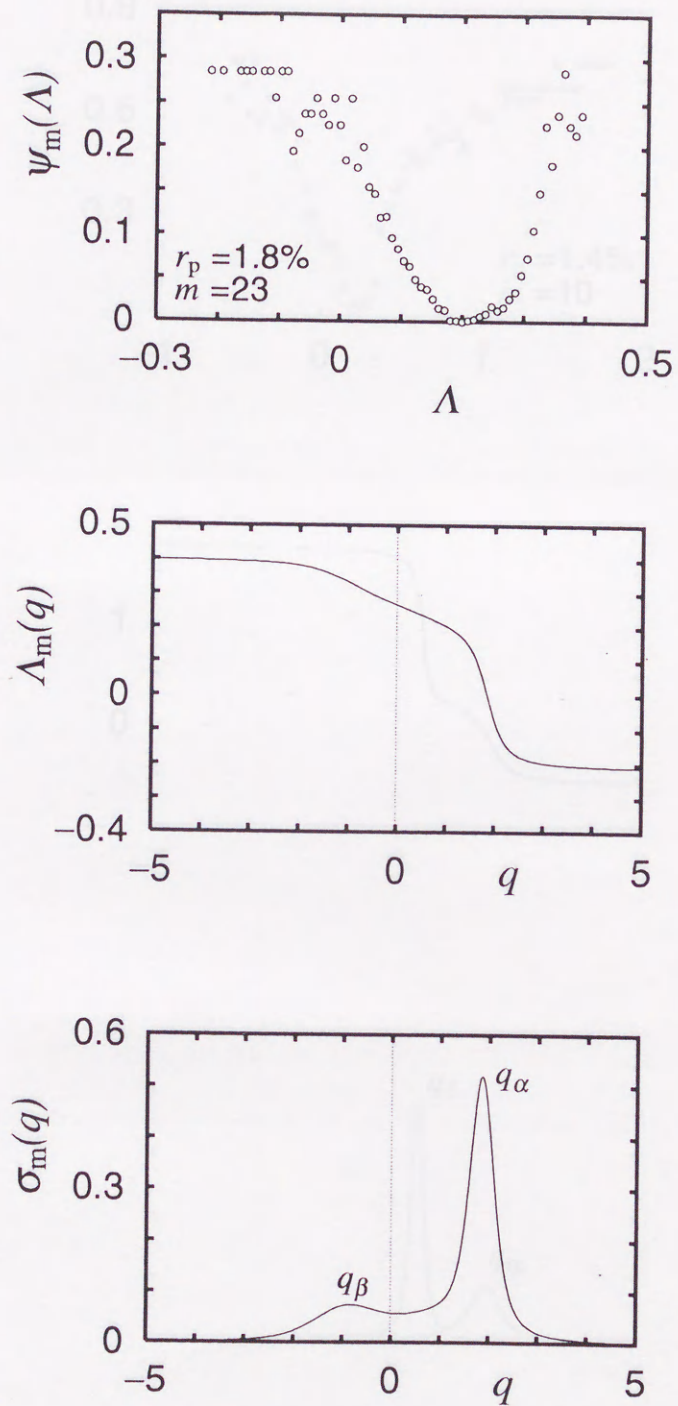


図 4.30: 1次元時系列からの動的構造関数 (振り子系: バースト直前)

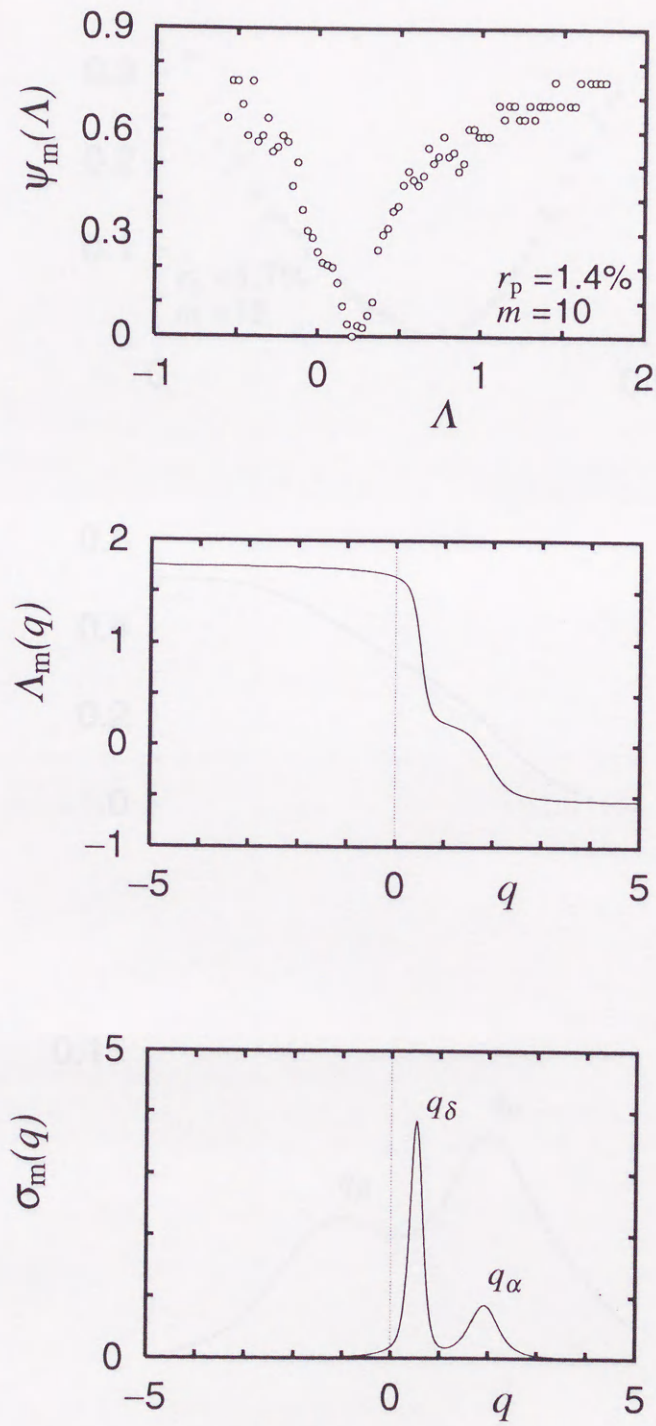


図 4.31: 1次元時系列からの動的構造関数 (振子系统: バースト後)

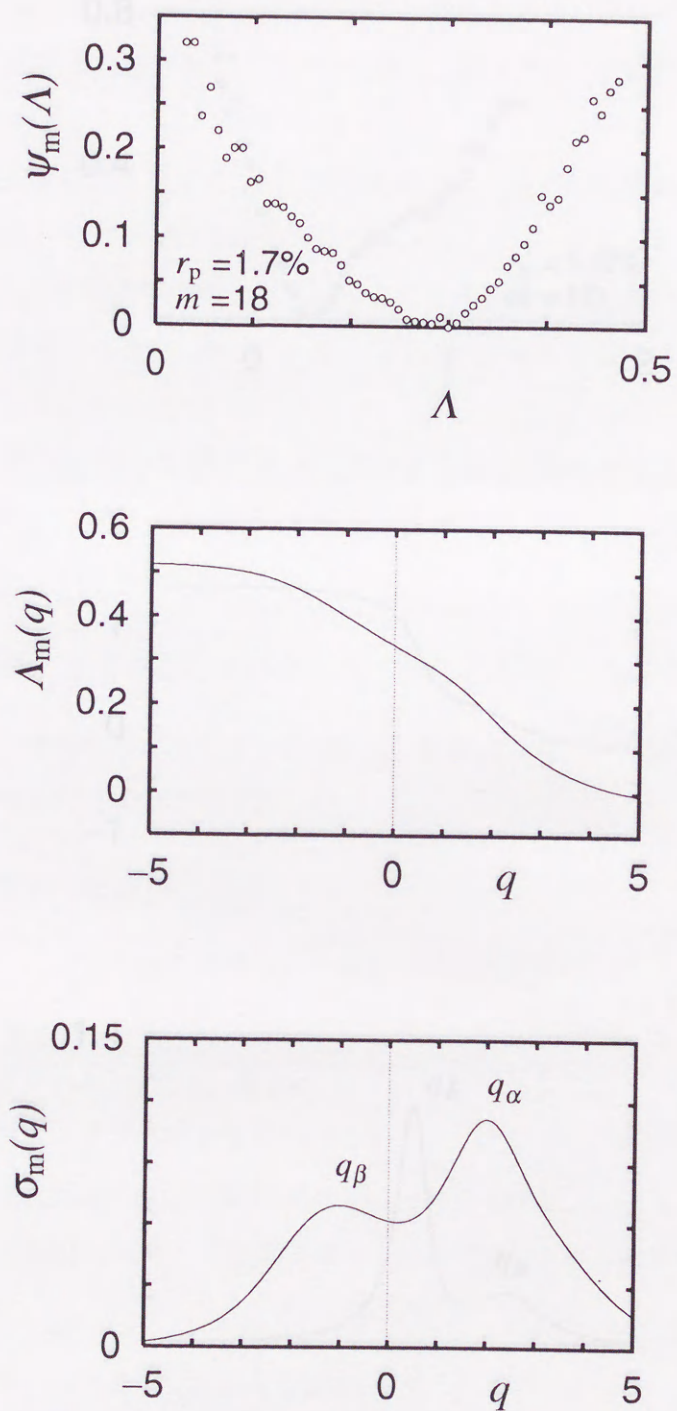


図 4.32: 1次元時系列からの動的構造関数 (ダフフィング系: バースト直前)

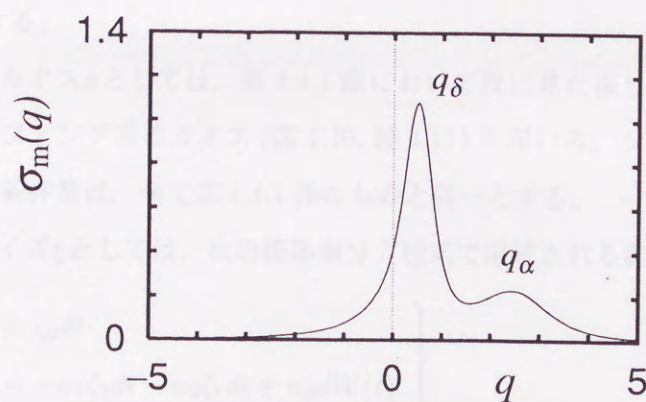
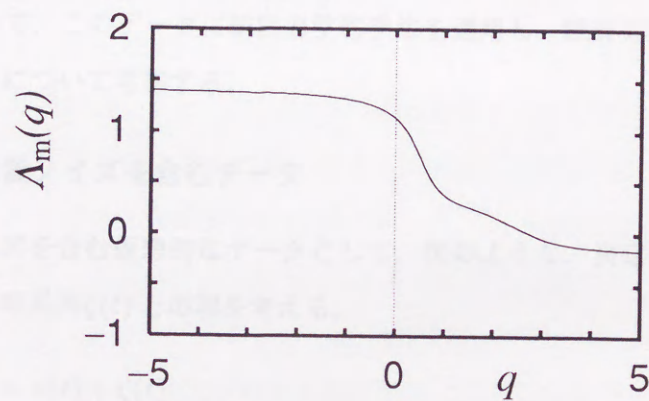
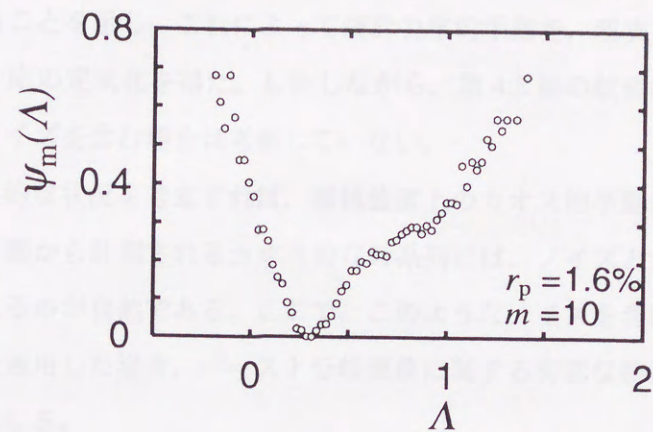


図 4.33: 1次元時系列からの動的構造関数 (ダuffィング系: バースト後)

4.6 統計力学的手法に対する装置ノイズの影響

第 4.5 節においては、時系列として得られたカオスの挙動に対して統計力学的手法が有効であることを示し、これによって統計力学的手法を、現実のカオスの挙動に適用するための一応の定式化を得た。しかしながら、第 4.5 節の数値例においては、カオスの時系列がノイズを含む場合は考察していない。

より現実的な状況を考慮すれば、機械装置上のカオスの挙動から計測されたデータ列などの実挙動から計測されるカオス的な時系列には、ノイズと見なせる成分が混入していると考えるのが自然である。ここで、このようなノイズを含む時系列に対して統計力学的手法を適用した場合、バースト分岐現象に関する有意な特徴抽出が可能であるかとの疑問が生じる。

そこで本節では、第 4.5 節で扱ったような決定論的カオスとノイズの和を仮想的な観測データとして、このデータに統計力学的手法を適用し、統計力学的手法がその有効性を保ち得るかについて考察する。

4.6.1 装置ノイズを含むデータ

装置ノイズを含む仮想的なデータとして、次のような、決定論的カオスの時系列 $z(t)$ とノイズの時系列 $\zeta(t)$ との和を考える。

$$Z(t) = z(t) + \zeta(t) \quad (4.31)$$

ここに、 Z , z , ζ は 2 次元ベクトルであり、それぞれ $Z = (Z_1, Z_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ とする。

ここで、カオス z としては、第 4.4.1 節において既に見た振り子系のカオス (図 4.8, 図 4.9) とダuffing 系のカオス (図 4.10, 図 4.11) を用いる。システムパラメータ、及び数値積分の条件等は、全て第 4.4.1 節のものと同一とする。

一方、ノイズ ζ としては、次の確率微分方程式で記述される確率過程を考える。

$$\left. \begin{aligned} d\zeta_1 &= \zeta_2 dt \\ d\zeta_2 &= -n_1 \zeta_2 dt - n_2 \zeta_1 dt + n_3 dW(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

ここに、 $W(t)$ はブラウン運動とする。このノイズのスペクトル密度は次式となる。

$$S(\omega) = \frac{n_3^2}{(\omega^2 - n_2)^2 + n_1^2 \omega^2} \quad (4.33)$$

式(4.32)によって模擬的に発生させるノイズの特性を決定する際には、計測器の持つ周波数と比較して、機械装置上の主要な挙動がかなり低周波の領域で生じるであろうことを考慮する。これに基づいて、ノイズの周波数特性を決定するパラメータ n_1, n_2 の選択は、ノイズの主要な周波数成分がカオスの挙動の主要な周波数成分より十分高い領域に存在するように、振り子系に対して $n_1 = 1, n_2 = 800$ 、ダuffing系に対して $n_1 = 1, n_2 = 170$ と選んだ。

図 4.34, 図 4.35 に、振り子系、ダuffing系に発生するバースト分岐前後のカオスの挙動のスペクトル密度と、対応するノイズのスペクトル密度を示す。カオスの挙動のスペクトル密度は、データ長 2^{15} の 2^8 分割平均による FFT 法によって求め、ノイズのスペクトル密度は式(4.33)より $n_3 = 0.1$ の条件で求めた。

これらの図から、ノイズの主要な周波数成分がカオスの挙動の主要な周波数成分より十分高い領域に存在しているのが分かる。

図 4.34 および図 4.35 に示した周波数特性を有するカオスとノイズを用いて、式(4.31)から生成した模擬的なデータの、 2.0×10^5 点のポアンカレプロットを図 4.36～図 4.39 に示す。ノイズの時系列の生成には、カオスの挙動と同様に RKG 法を用い、きざみは対応するカオスの挙動の数値積分と同様にとった。 n_3 の値は図中に記す。なお $n_3 = 0$ の条件においては、カオスの挙動は第 4.4.1 節のものと一致する。

振り子系、ダuffing系の、バースト前後のいずれに関しても、 n_3 の値が 0.1, 0.2, 0.3 と増加し、ノイズの強度が増大するにつれ、ストレンジアトラクタの 1 次元的な構造がノイズによって不鮮明になっていく様子が見てとれる。これによって、ストレンジアトラクタの局所構造の微細な変化を取り出す統計力学的手法は、なんらかの影響を受けると考えられるが、その点に関して次節で考察する。

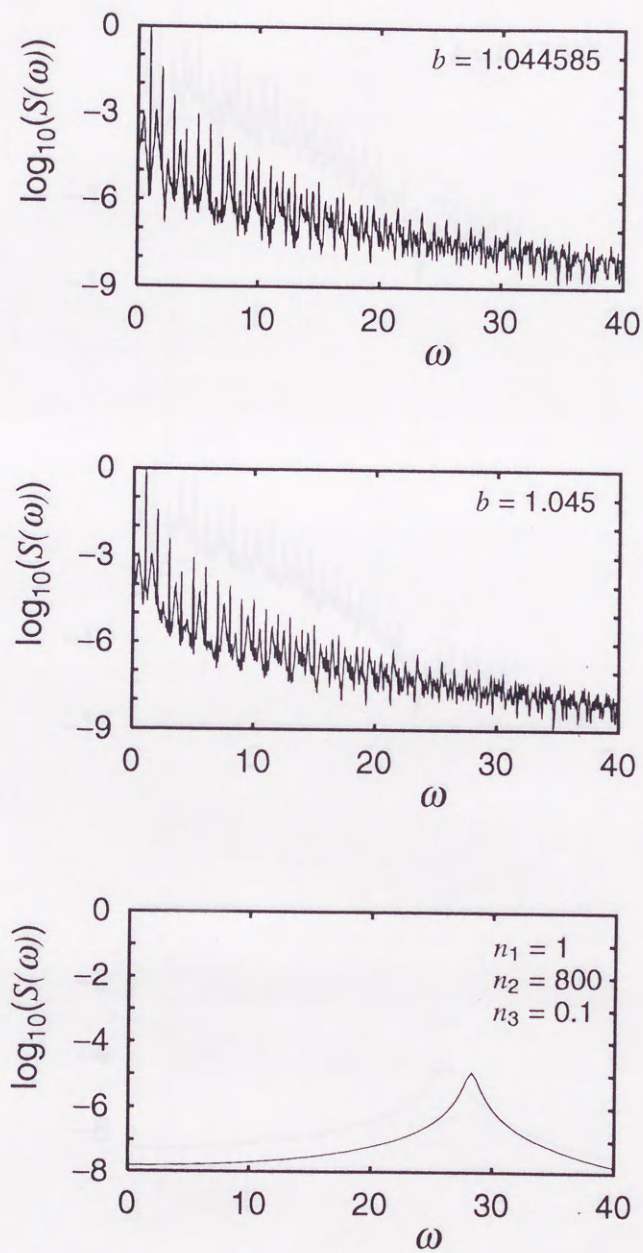


図 4.34: カオス的挙動とノイズのスペクトル密度 (振り子系)

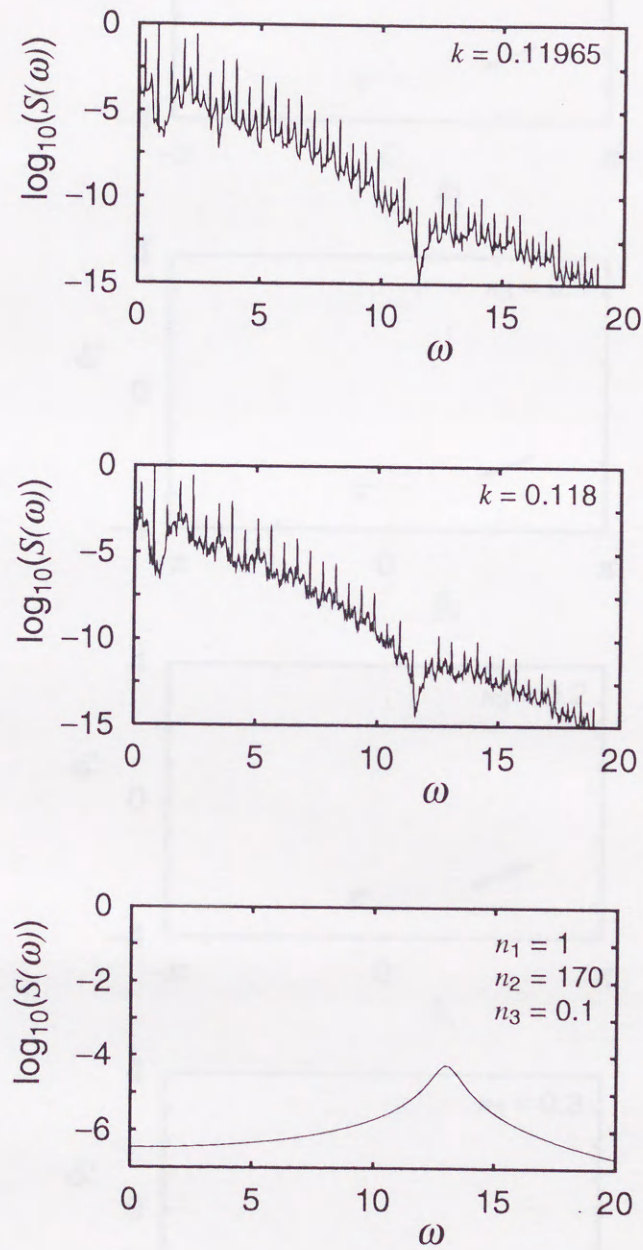


図 4.35: カオスの挙動とノイズのスペクトル密度 (ダッフィング系)

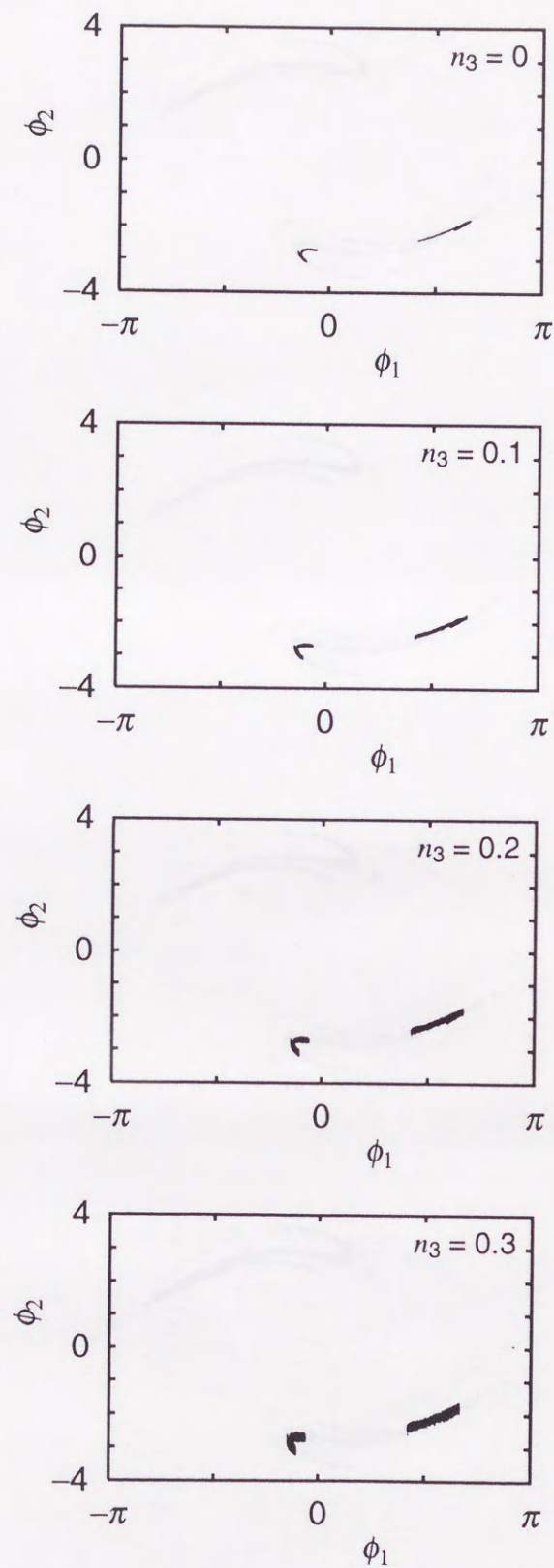


図 4.36: 搬送ノイズを含むカオスの挙動 (振子系统: バースト分岐直前)

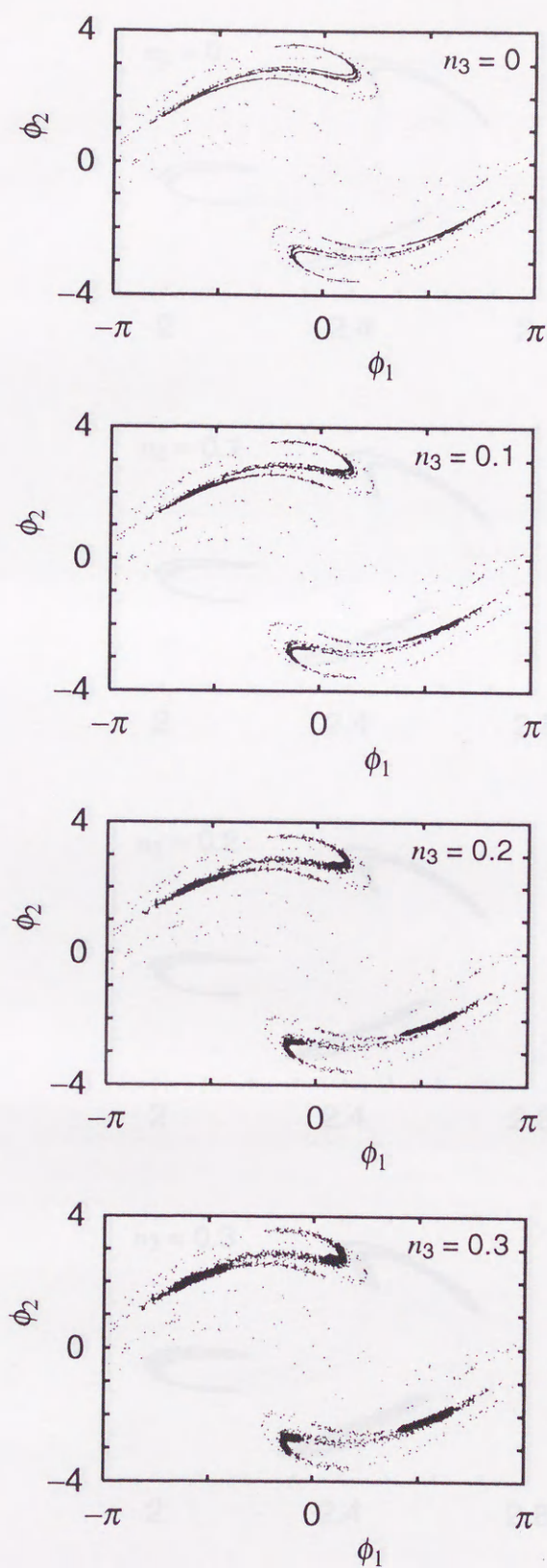


図 4.37: 搬送ノイズを含むカオスの挙動 (振り子系: バースト分岐後)

4.6 統計力学的手法に対する装置ノイズの影響

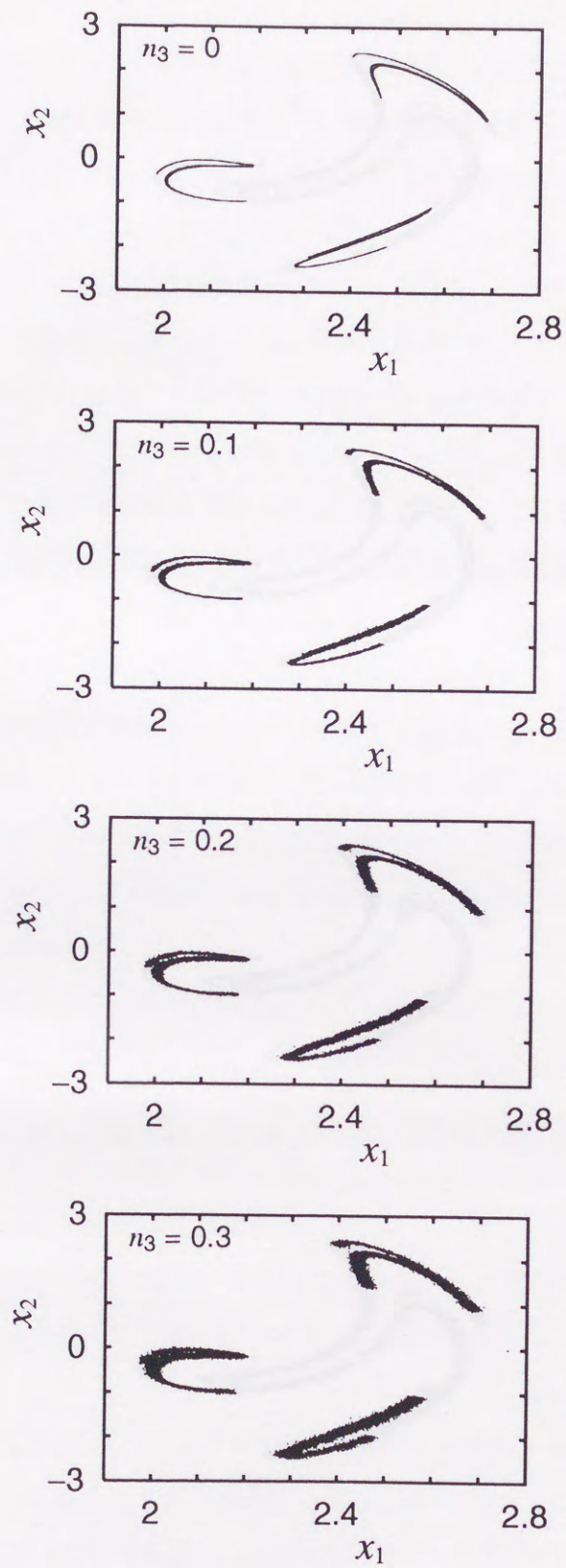


図 4.38: 搬送ノイズを含むカオスの挙動 (ダuffینگ系: バースト分岐直前)

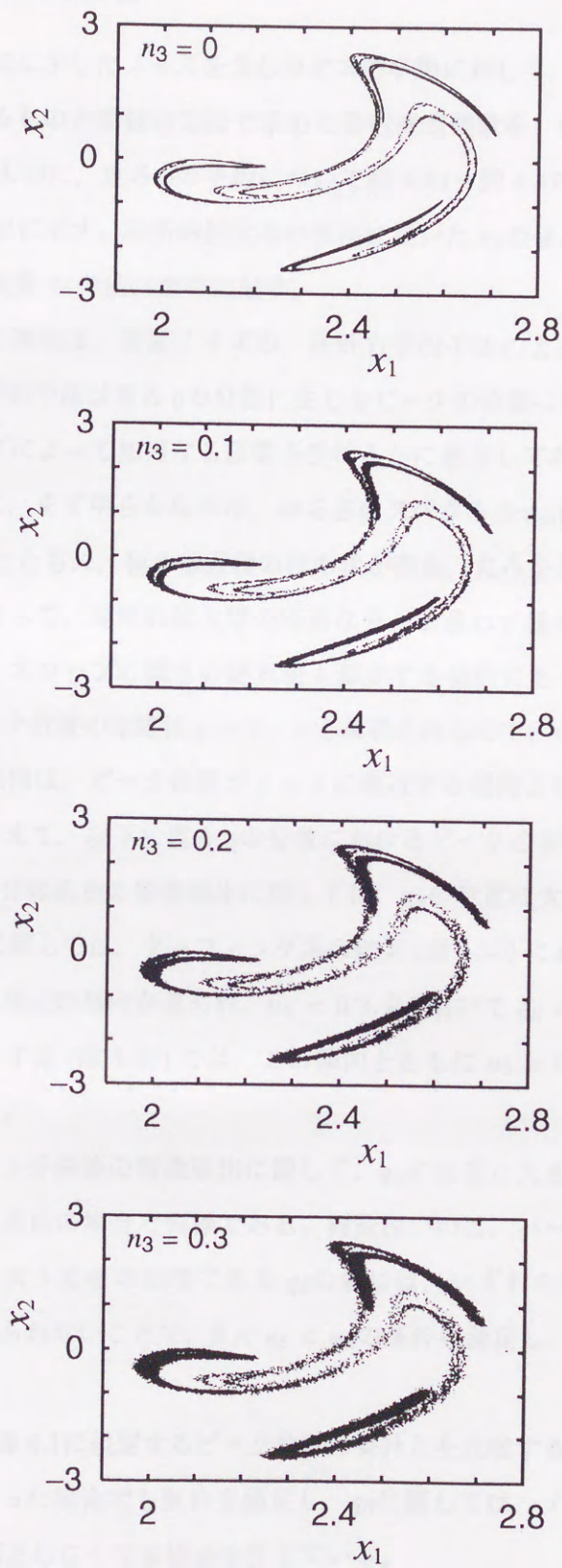


図 4.39: 搬送ノイズを含むカオスの挙動 (ダuffing系: バースト分岐後)

4.6.2 装置ノイズの影響

図 4.36～図 4.39 に示したノイズを含むカオスの挙動に対して、第 4.5.2 節における 2 次元時系列に対するものと同様の方法で求めた動的構造関数を、ゆらぎのスペクトルについて図 4.40～図 4.43 に、重み q の平均について図 4.44～図 4.47 に、重み q の分散について図 4.48～図 4.51 に示す。局所的拡大率の算出に用いた r_p の値、および粗視的拡大率の算出に用いた粗視量 m の値は図中に記す。

ここでの最大の興味は、装置ノイズの、統計力学的手法による特徴抽出結果への影響である。統計力学的手法は重み q の分散に生じるピーク的位置に着目するので、このピーク的位置がノイズによって如何なる影響を受けるかに着目してみる。

その前提として、まず明らかなのは、ゆらぎのスペクトル $\psi_m(\Lambda)$ において、いずれの場合も n_3 の増大とともに、極小値近傍の凹形状が開き、丸みをおびる傾向が見られる点である。これによって、局所的拡大率の特異な分布を表わす極小値近傍の線形スロープが不鮮明になり、スロープの傾きの絶対値も減少する傾向にある。スロープの傾きを s とした場合、ピーク位置の座標は $q = 1 - s$ と表現されるので、 n_3 の増加に伴う傾き s の絶対値の減少の傾向は、ピーク位置が $q = 1$ に漸近する傾向として現れることが予想される。これを踏まえて、以下に重み q の分散におけるピークの現れ方に着目してみる。

まず、バースト分岐直前の特徴抽出に関しては、 q_α の位置に大きな変化は見られない。これに対して q_β に関しては、ダフフィング系の結果 (図 4.50) において、明らかにピーク位置の $q = 1$ への漸近の傾向が見られ、 $n_3 = 0.2, 0.3$ おいて $q_\beta < 0$ の条件を満たしていない。さらに振り子系 (図 4.48) では、この傾向とともに $n_3 = 0.2, 0.3$ においてピークの消失が見られる。

一方で、バースト分岐後の特徴抽出に関して、 q_α の位置に大きな変化が見られないのは、バースト分岐直前の場合と同様である。興味深いのは、バースト直前の指標である q_β と異なり、バースト直後の指標である q_δ の値には、いずれの場合 (図 4.49, 図 4.51) も大きな変化が見られないことで、 $0 < q_\delta < q_\alpha$ の条件を満足し、ピークの消失も生じていない。

これらの結果と表 4.1 に規定するピーク位置の条件とを比較すると、 q_α および q_δ に関してはノイズが加わった場合でも条件を満足し、 q_β に関しては、ノイズの強度によっては $q_\beta < 0$ の条件を満足しなくなる場合を生じている。

このようなノイズの強度とピーク位置の関係について、結果全体をまとめたものを図 4.52 に示す。

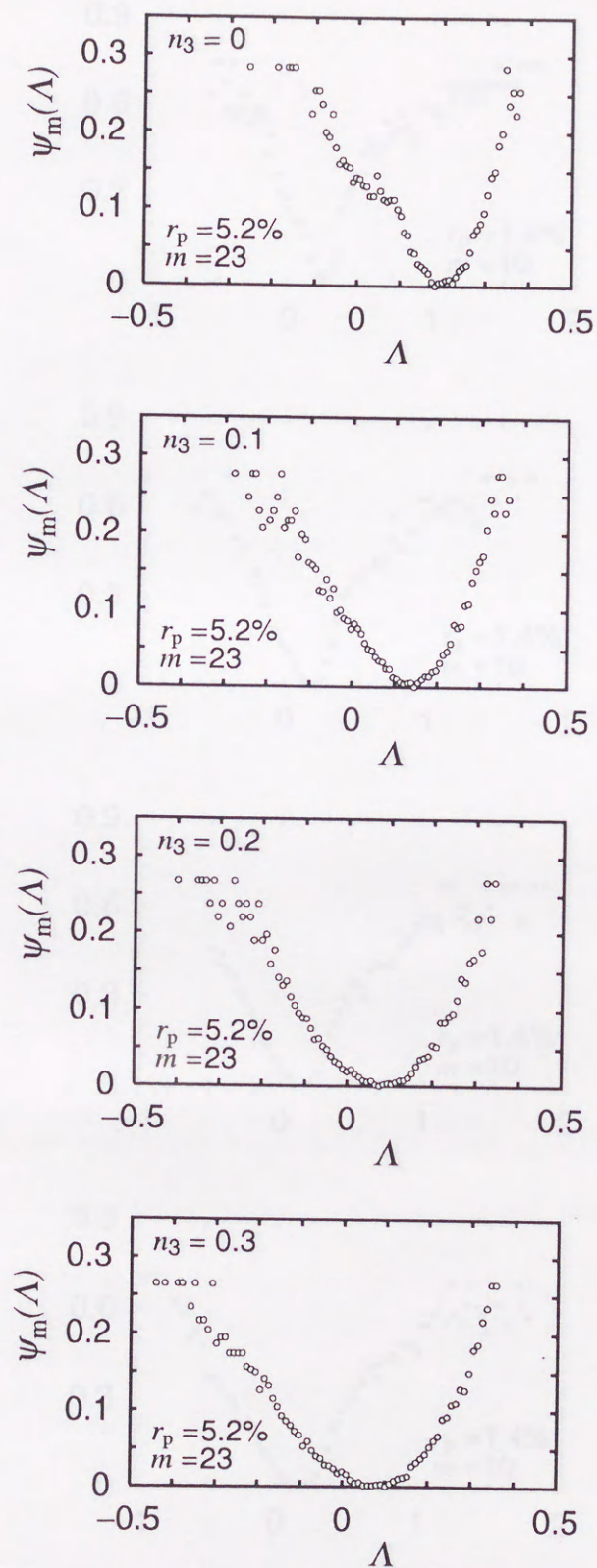


図 4.40: ゆらぎのスペクトル (振子系统・ノイズ: バースト分岐直前)

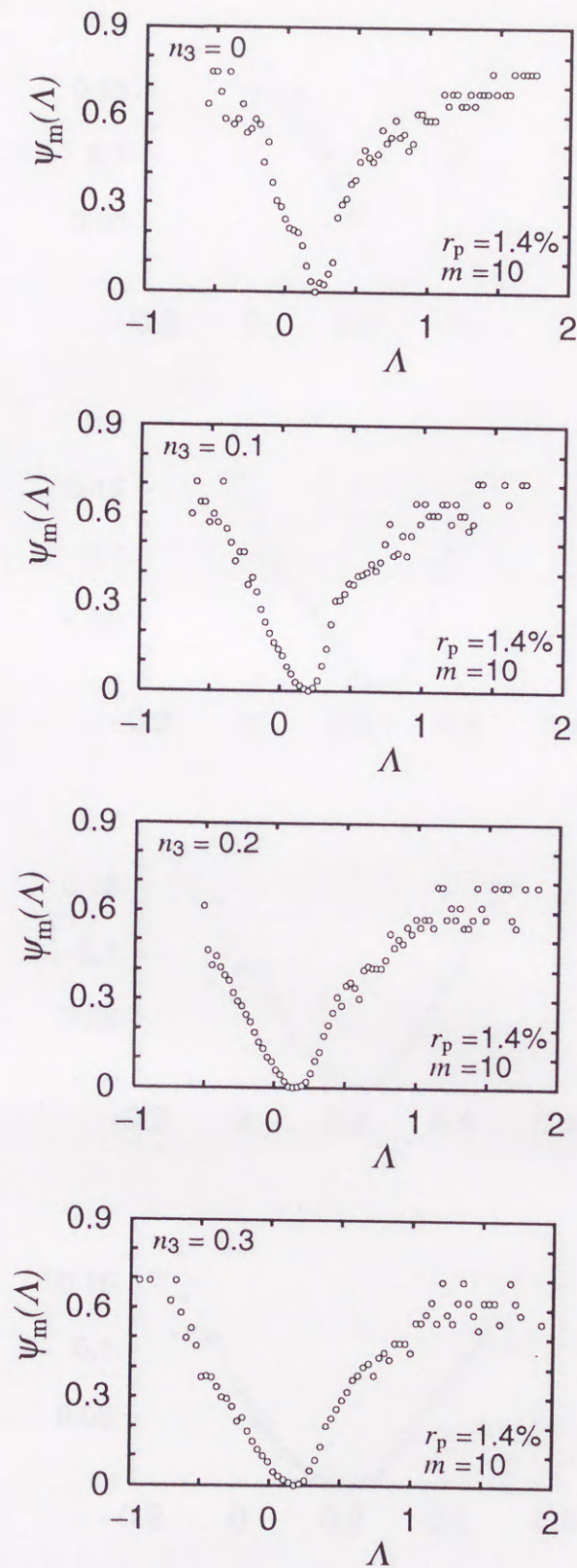


図 4.41: ゆらぎのスペクトル (振子系・ノイズ: バースト分岐後)

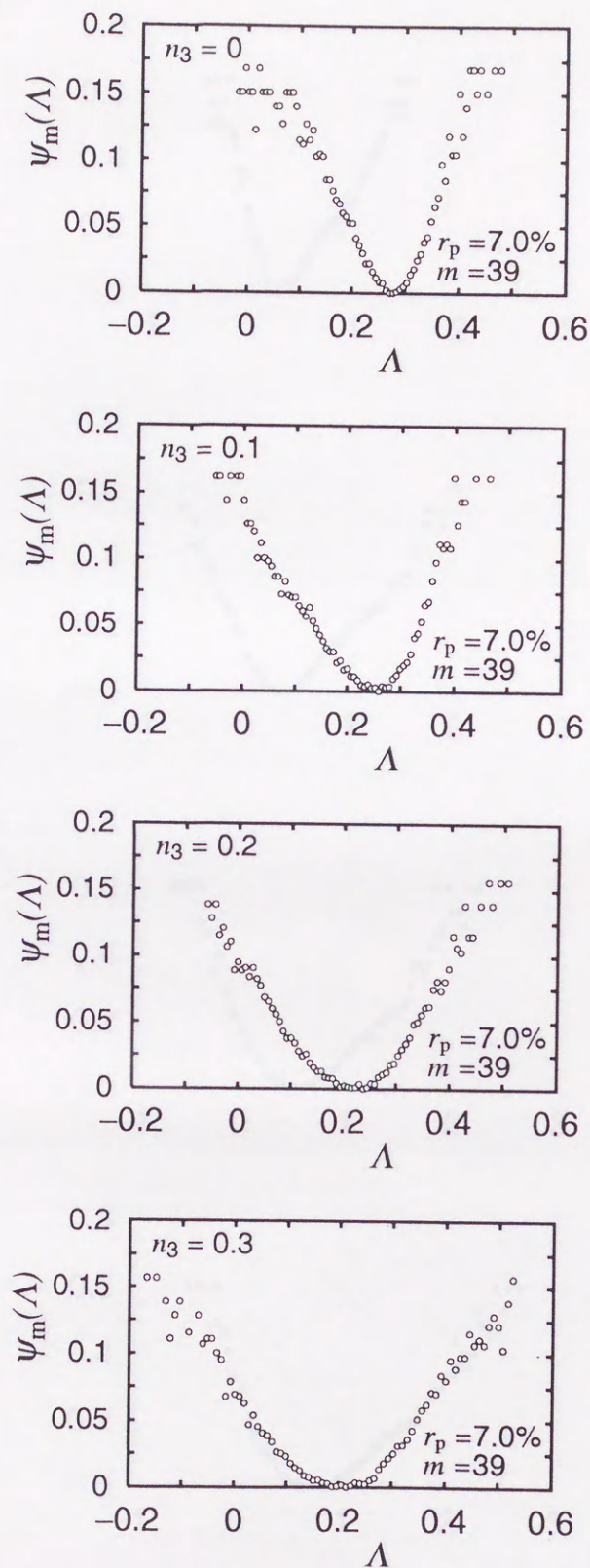


図 4.42: ゆらぎのスペクトル(ダフティング系・ノイズ: バースト分岐直前)

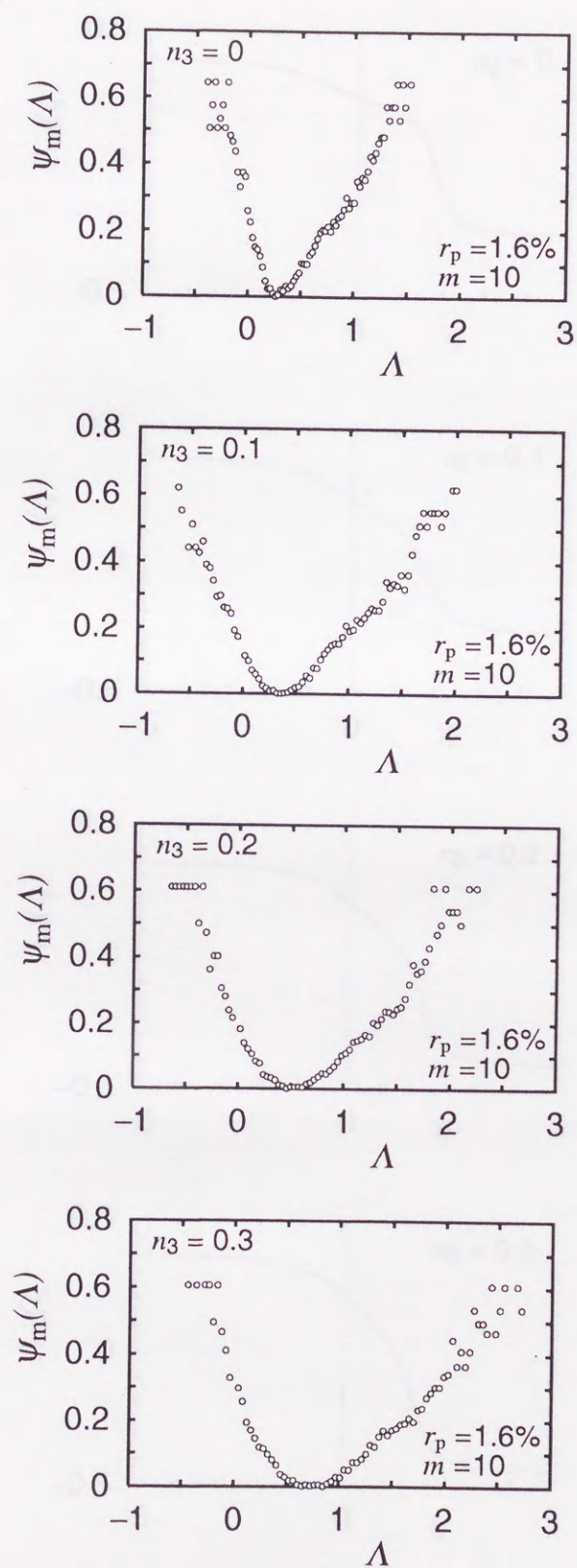


図 4.43: ゆらぎのスペクトル(ダuffing系・ノイズ: バースト分岐後)

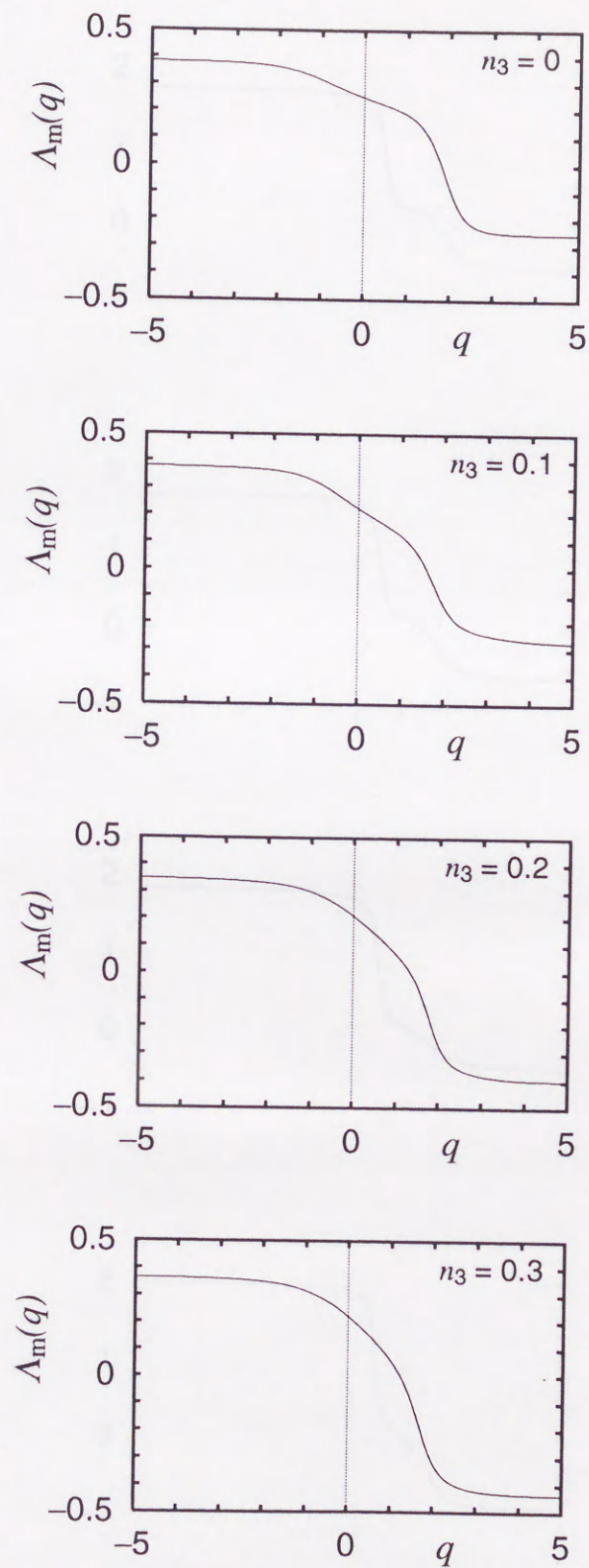


図 4.44: 重み q の平均 (振り子系・ノイズ: バースト分岐直前)

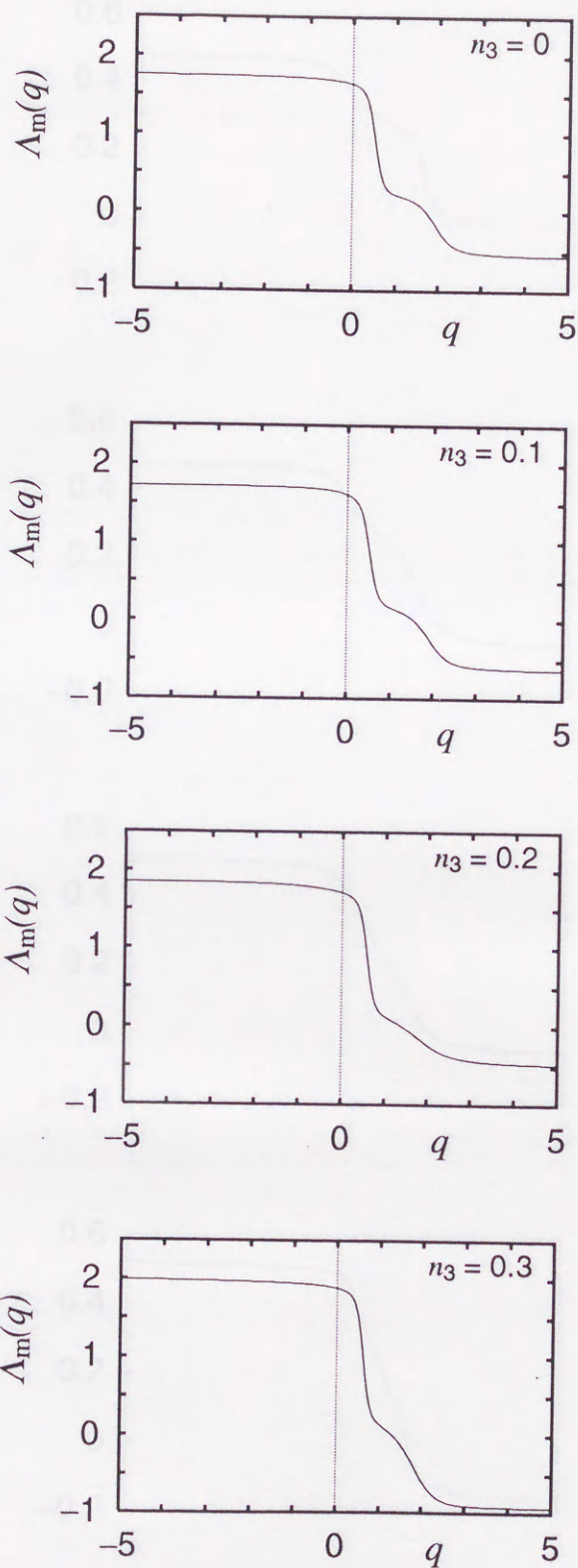


図 4.45: 重み q の平均 (振り子系・ノイズ: バースト分岐後)

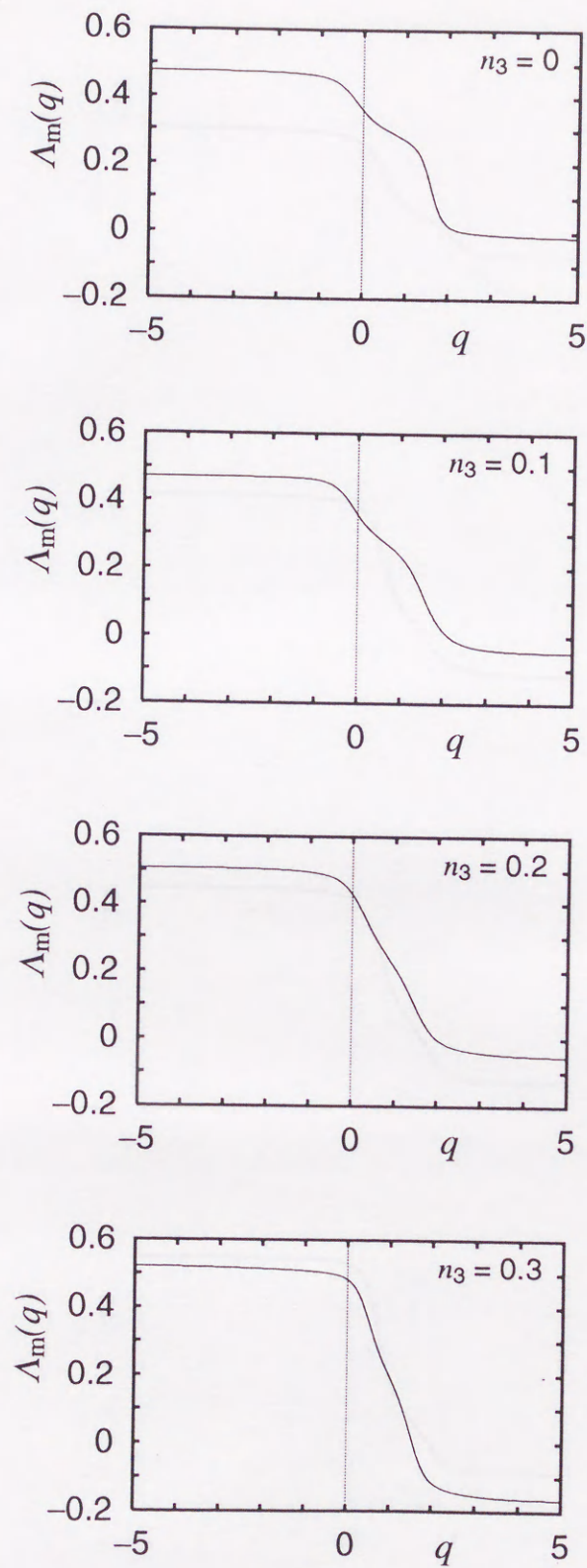


図 4.46: 重み q の平均 (ダフフィング系・ノイズ: バースト分岐直前)

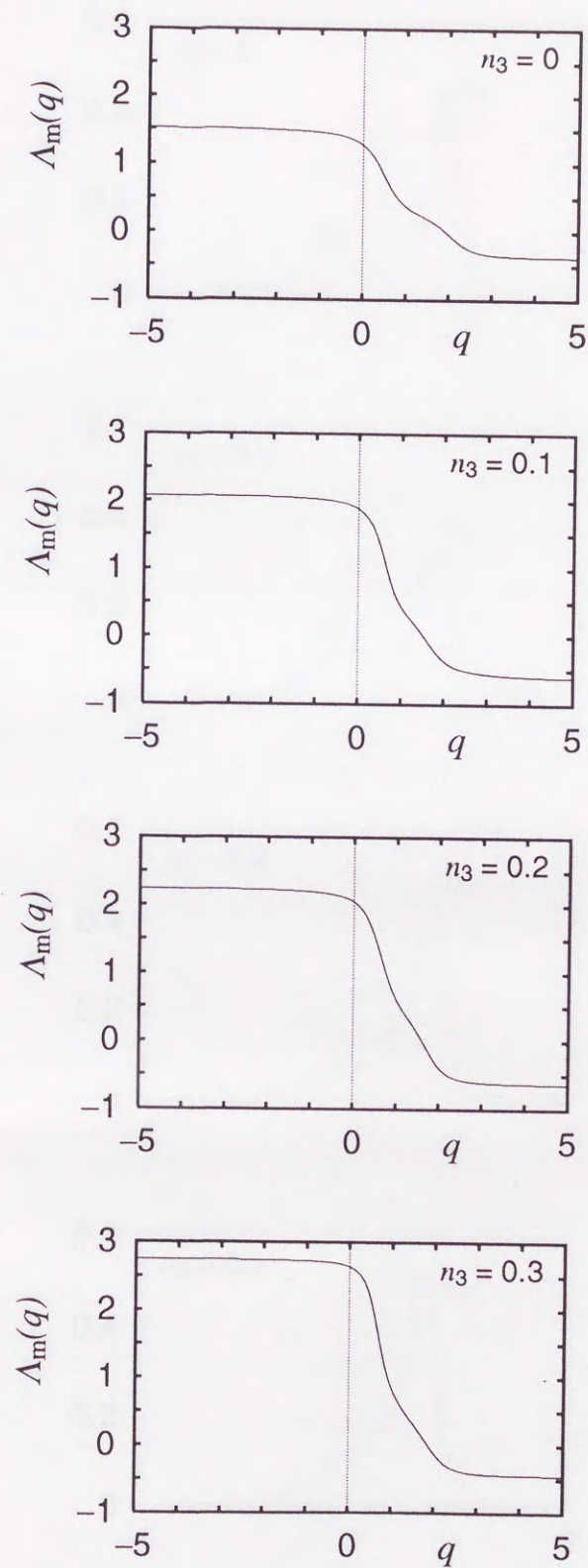


図 4.47: 重み q の平均 (ダフティング系・ノイズ: バースト分岐後)

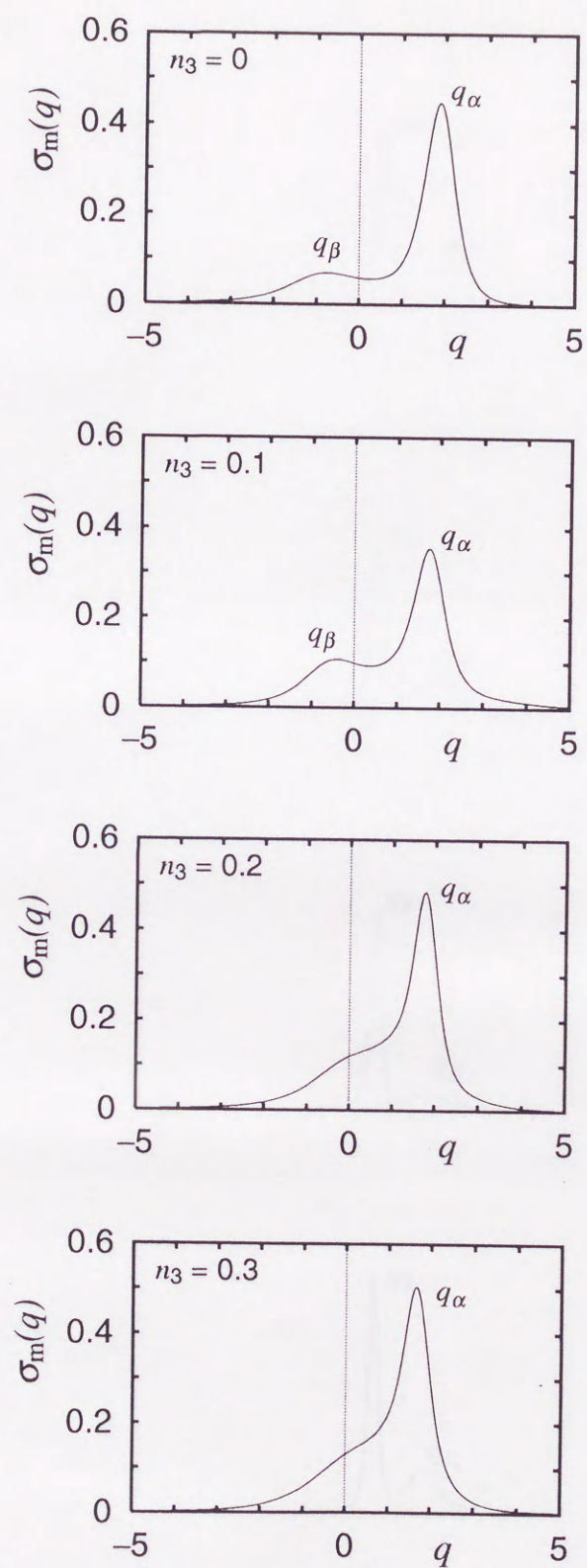


図 4.48: 重み q の分散 (振子系・ノイズ: バースト分岐直前)

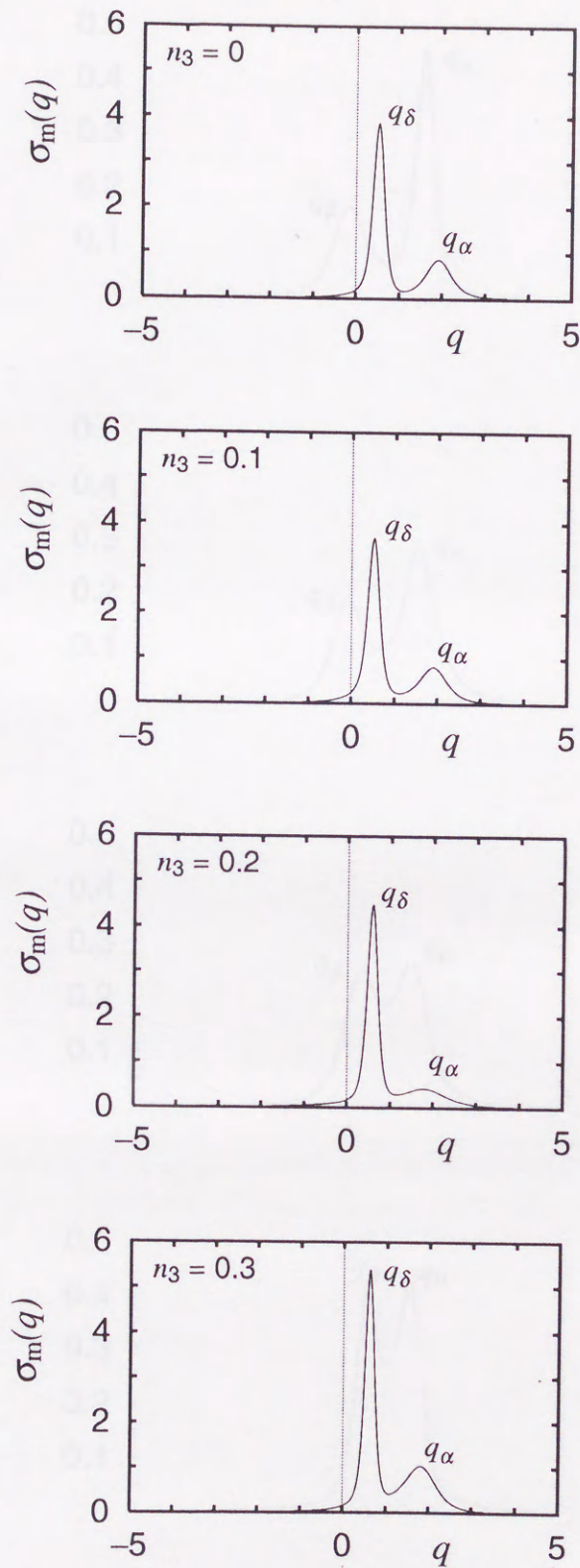


図 4.49: 重み q の分散 (振り子系・ノイズ: バースト分岐後)

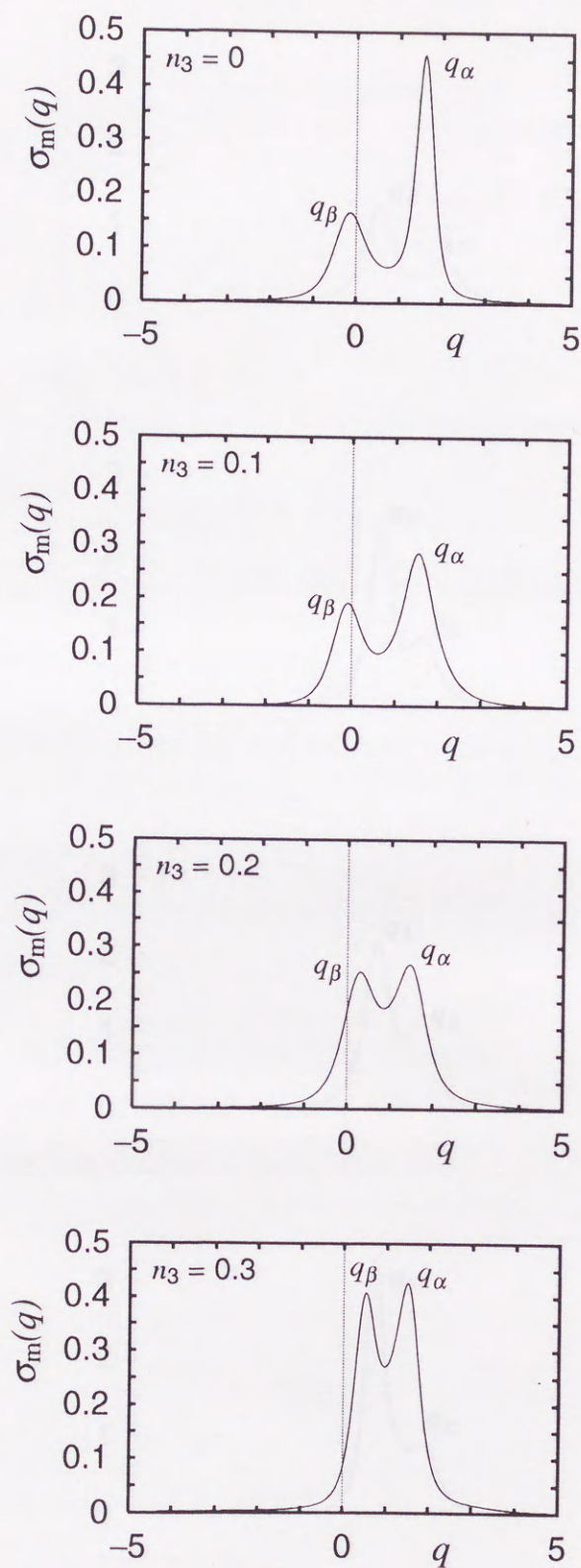


図 4.50: 重み q の分散 (ダフティング系・ノイズ: バースト分岐直前)

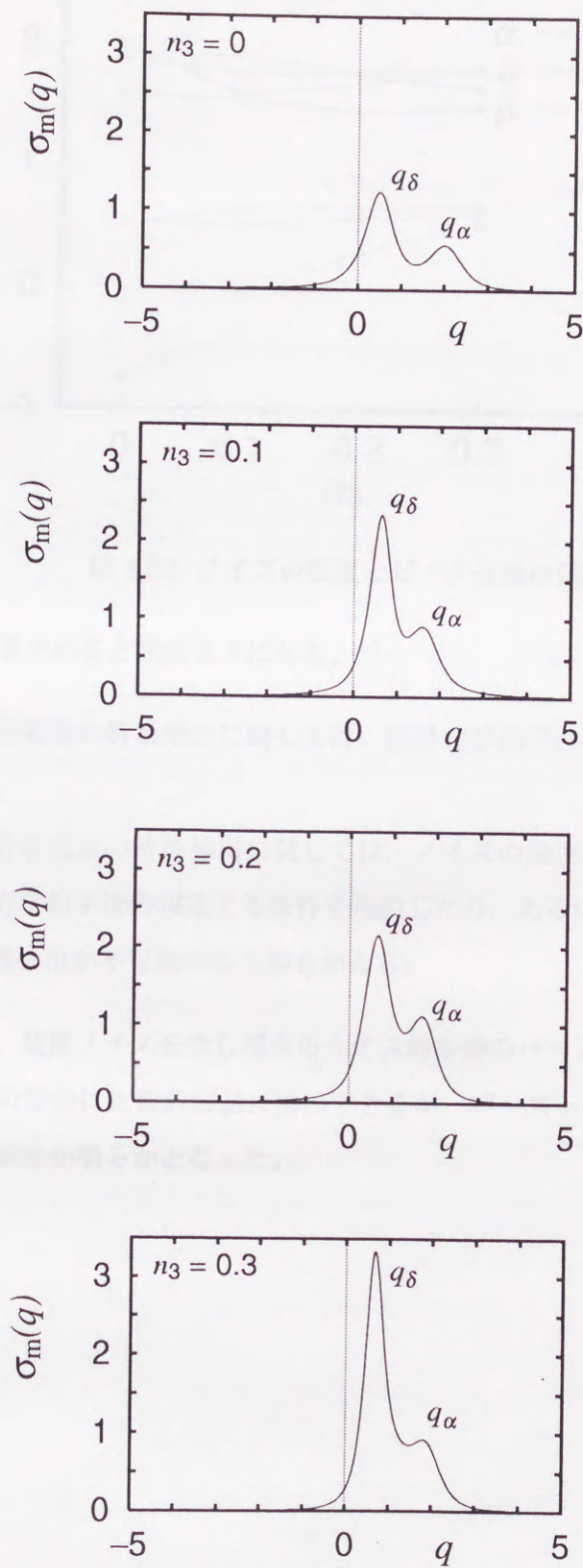


図 4.51: 重み q の分散 (ダフティング系・ノイズ: バースト分岐後)

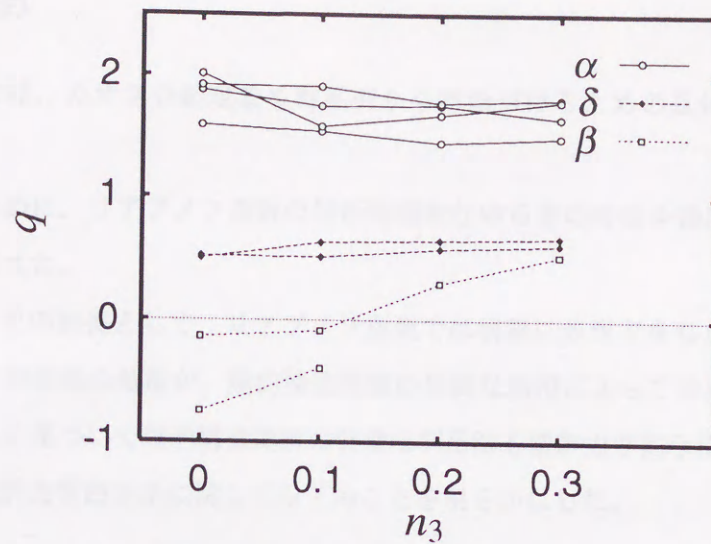


図 4.52: ノイズの強度とピーク位置の関係

以上の結果をまとめると次のようになる。

- バースト分岐後の特徴抽出に関しては、統計力学的手法の結果はノイズの影響を受けない。
- バースト分岐直前の特徴抽出に関しては、ノイズの強度によっては、ピークの位置が統計力学的手法の規定する条件を逸脱したり、あるいはピークの消失が生じ、有意な特徴抽出が不可能になる場合がある。

このことから、装置ノイズを含む現実のカオスの挙動のバースト分岐現象を扱う場合、バースト分岐後の特徴は比較的容易に抽出できるが、バースト分岐直前の特徴抽出は無効になり得る可能性が明らかとなった。

4.7 まとめ

本章では、カオス分岐現象を時系列から特徴づけるための具体的な方法について論じた。

そのために、リアプノフ指数の局所時間的なゆらぎの特徴を抽出する動的構造関数の利用を考えた。

まず、その前提として、リアプノフ指数では明確に表現できなかったカオス分岐近傍のカオスの挙動の特徴が、動的構造関数の単純な利用によって抽出可能である実例を示し、これに基づいて動的構造関数の簡便な利用法を統計力学的手法として提案した。

この統計力学的手法に関して以下のことを明らかにした。

- バースト分岐現象近傍のカオスの挙動は、動的構造関数に現れるピークのパターンによって特徴づけ可能である。
- 計算時間の短縮を意図した粗視的拡大率の定義によっても、統計力学的手法は有効である。
- 運動方程式が未知であっても、カオスの挙動の1次元時系列が既知ならば統計力学的手法は有効である。

この結果から、統計力学的手法を、機械装置に発生するカオスの挙動などの、現実のカオスに適用するための定式化を得た。

この結果を踏まえ、より現実的な状況として、決定論的カオスの計測データに装置ノイズが混入した場合を考えた。その場合の統計力学的手法の有効性について議論し、以下の結果を得た。

- バースト分岐後の特徴抽出は、統計力学的手法の意味でノイズの影響を受けない。
- バースト分岐直前の特徴抽出では、ノイズの強度により、ピークの位置が表4.1の条件を満足しない場合や、ピークの消失が生じ得る。

この結果から、現実のカオスの挙動を統計力学的手法によって特徴付ける場合、バースト分岐後の特徴は比較的容易に取り出せるが、バースト分岐直前に関しては、混入している装置ノイズの強度により特徴抽出が無効になる可能性が明らかになった。

第 5 章

カオスの特徴抽出に関する実験

5.1 はじめに

本章の課題は、第 4 章で議論したカオス分岐現象の特徴抽出に関する統計力学的手法の有効性を実験的に検証することにある。そのための具体的な機械振動系として、係数励振振り子系を取り上げる。

まず、第 5.2 節においては、実験に用いた装置の構成、装置の力学モデル、運動方程式を示す。

第 5.3 節では、この装置上に、第 4.4.1 節における数値例で見たのと同様なバースト分岐現象が生じることを確認し、これに対して統計力学的手法を適用する。得られた結果に対して、工学的意味付けの明瞭な解釈を試みる。

最後に、第 5.4 節において以上の結果をまとめる。

5.2 実験装置

5.2.1 実験装置の構成

実験に用いる装置は、支点の上下する振り子系を機械的に実現したものである。コントロールパラメータの変化に伴うカオス分岐現象を再現するために、可変パラメータとして振り子支点まわりの粘性減衰を考える。

本研究で用いた実験装置の構成を図 5.1 に示す。AC サーボモータによって駆動されるスライダクランク機構によって、スライドユニットが鉛直方向に周波数 2[Hz] の往復運動する。このユニット上に振り子主軸があり、その回転はタイミングベルトを介して、振り子の角変位測定用ロータリエンコーダ、および振り子支点まわりの粘性減衰制御用の渦電流ブレーキに伝達される。

図 5.2 に本装置における計測制御システムの構成を示す。本装置における制御は、スライダクランク機構駆動用の AC サーボモータ 4 の定速度制御と、粘性減衰制御用の渦電流ブレーキ 3 の励磁電圧の制御の二点である。サーボモータ 4 はサーボドライバ 5 によ

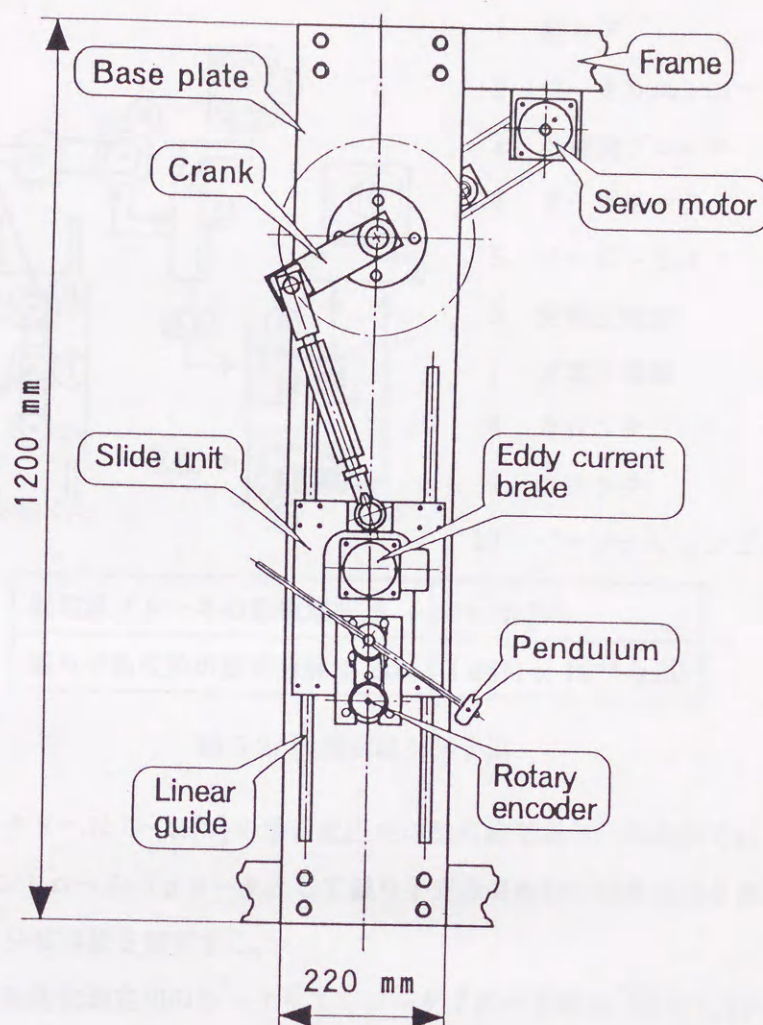
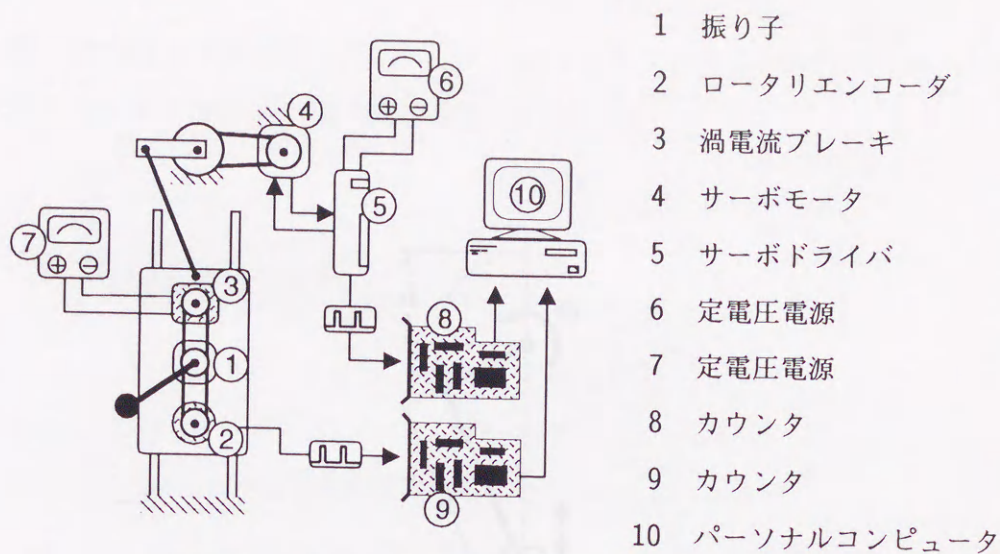


図 5.1: 実験装置

り定速度制御され、このドライバへの速度指令は、6の定電圧電源が発生する直流電圧によって行う。また渦電流ブレーキ3の励磁電圧は7の定電圧電源から供給する。

一方で、本装置における計測は、励振の位相を特定するためのサーボモータ4の角変位の計測と、振り子の角変位計測の二点である。サーボモータ4はロータリエンコーダを内蔵しており、この出力はサーボドライバ5を介して、8のカウンタに入力される。また振り子1の角変位は2のロータリエンコーダによって検出され、その出力は9のカウンタに入力される。8、9のカウンタの出力は10のパーソナルコンピュータに取り込まれる。サーボモータの角変位に関する8の入力は、ポアンカレプロットを生成する場合の励振の位相の特定、および遅延座標を生成する場合の位相差(時間遅れ)の設定に使用され、この8の入力に基づいて決定されたタイミング毎に、振り子角変位に関する9の入力を、10の記憶装置上に格納する。



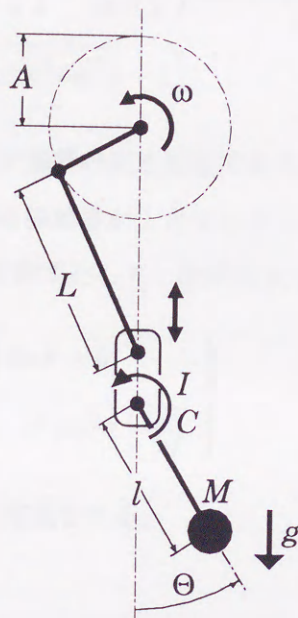
渦電流ブレーキの励磁電圧 E	0~45 [V]
振り子角変位の測定分解能 $\Delta\theta$	1.0471×10^{-3} [rad]

図 5.2: 計測制御システム

渦電流ブレーキ 3 へは 0~45[V] の励磁電圧を印加可能であり、本実験では、この励磁電圧 E [V] をコントロールパラメータとして振り子支点まわりの粘性減衰を変化させ、これに伴うカオス分岐現象を観察する。

また振り子の角変位測定用のロータリエンコーダ 7 の分解能は (回転) / (6000 パルス) $\cong 1.0471 \times 10^{-3}$ [rad] であり、エンコーダ主軸と振り子主軸との減速比は 1 であるので、本実験における振り子角変位の測定分解能は $\Delta\theta = 1.0471 \times 10^{-3}$ [rad] となる。

図 5.3 に、本実験で考慮する装置の物理量、およびそれらの値を示す。なお、支点まわりの線形粘性減衰 C に関する $C(E)$ の表示は、 C が E の関数であることを表わし、これの具体的な値は第 5.2.2 節において無次元量として与える。



振り子角変位	Θ	$-\pi \sim \pi$ [rad]
励振振幅	A	130.0×10^{-3} [m]
励振周波数	ω	12.57 [rad/s]
連接棒長	L	348.0×10^{-3} [m]
振り子支点まわりの慣性モーメント	I	1.643×10^{-3} [kgm ²]
振り子支点まわりの線形粘性減衰	C	$C(E)$ [Nms]
振り子長	l	160.0×10^{-3} [m]
振り子質量	M	102.7×10^{-3} [kg]
重力加速度	g	9.8 [m/s ²]
(クランク半径)/(連接棒長)	κ	0.3736

図 5.3: 装置各部の物理量

5.2.2 力学モデル

図 5.3 に示した実験装置の運動を記述するものとして、図 5.4 に示すような力学モデルを考える。この力学モデルの運動方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Theta} + \frac{C}{Ml^2 + I} \dot{\Theta} + \left(\frac{Mgl}{Ml^2 + I} + \frac{MlA\omega^2}{Ml^2 + I} h(\omega t, \kappa) \right) \sin \Theta &= 0 \\ h(t, \kappa) &= \cos t + \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

ここに $h(t, \kappa)$ はスライダクランク機構の出力波形である。

式 (5.1) に対して、線形系の固有振動数が 1 となるような規格化を行ったものを、装置の挙動を記述する無次元化運動方程式として、次式のように置く。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + 2ah(\Omega t, \kappa)] \sin \theta &= 0 \\ h(t, \kappa) &= \cos t + \frac{1}{\kappa} \left(\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 t} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

ここに、 c , a , Ω は以下のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{C}{\sqrt{Mgl(Ml^2 + I)}} \\ a &= \frac{A\omega^2}{2g} \\ \Omega &= \omega \sqrt{\frac{Ml^2 + I}{Mgl}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

このとき、図 5.3 の物理量より、式 (5.2) の無次元化パラメータ a および Ω の値は、 $a = 1.047$, $\Omega = 2.047$ となる。一方で、無次元化減衰比 c に関して、図 5.5 に、渦電流ブレーキへの入力電圧 E と無次元化減衰比 c との関係を示す。この関係から、入力電圧 E の変

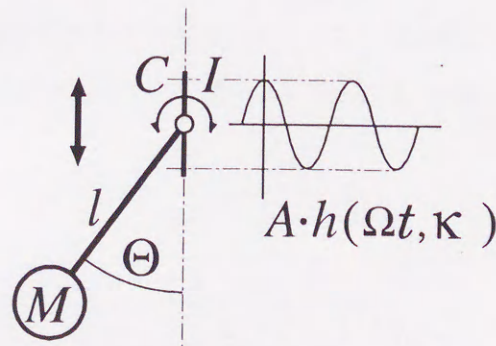


図 5.4: 装置の力学モデル

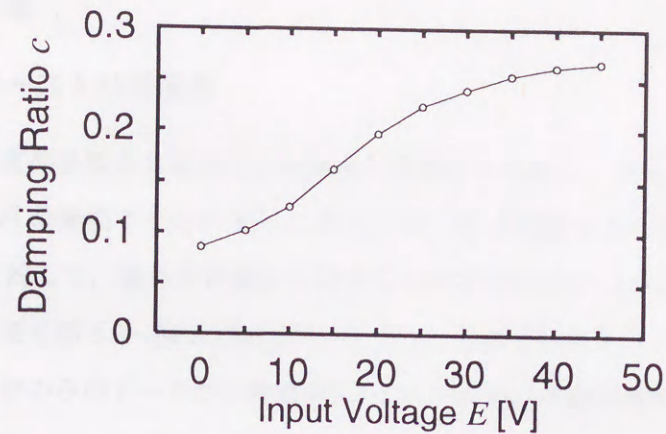


図 5.5: 渦電流ブレーキへの入力電圧と無次元化減衰比の関係

表 5.1: シミュレーションの条件と実験の条件の比較

	Simulation (Eq.(4.27))	Experiment(Eq.(5.2))
Excitation	$\cos(t)$	$h(t, \kappa)$
Frequency	$\omega = 2.0$	$\Omega \cong 2.047$
Amplitude	$b = 1.044585, 1.045$	$a \cong 1.047$
Damping	$\gamma = 0.2$	$c \cong 0.086 \sim 0.2672$

域 1~45[V] によって、無次元化減衰比 c は、0.086~0.2674 の変域を有することになる。この実験条件と、第 4.4.1 節で行った係数励振振り子系 (式 (4.27)) でのシミュレーションの条件を表 5.1 において比較する。

表 5.1 から、第 4.4.1 節で行った係数励振振り子系 (式 (4.27)) のシミュレーションにおける条件と、本実験の実験条件が励振波形を除いて類似しており、第 4.4.1 節でのシミュレーションと類似したバースト分岐現象が、実験装置上にも生じることが予想される。

5.3 実験結果

5.3.1 バースト分岐現象

まず、本実験装置の大域的な分岐構造を把握するために、コントロールパラメータ E を $15 \sim 45$ [V] の範囲で 0.5 [V] 刻みに変化させ、各 E の値ごとに個別の振動実験を行い、それぞれに対して、振り子角変位に関する 500 周期のポアンカレプロットを取得した。これらの結果を図 5.6～図 5.13 に示す。ただし、これらのストレンジアトラクタを得るために、角変位のみデータから時間遅れ $\Delta t = 197$ [ms] の遅延座標 (第 2.4.1 節) による再構成を用いた。

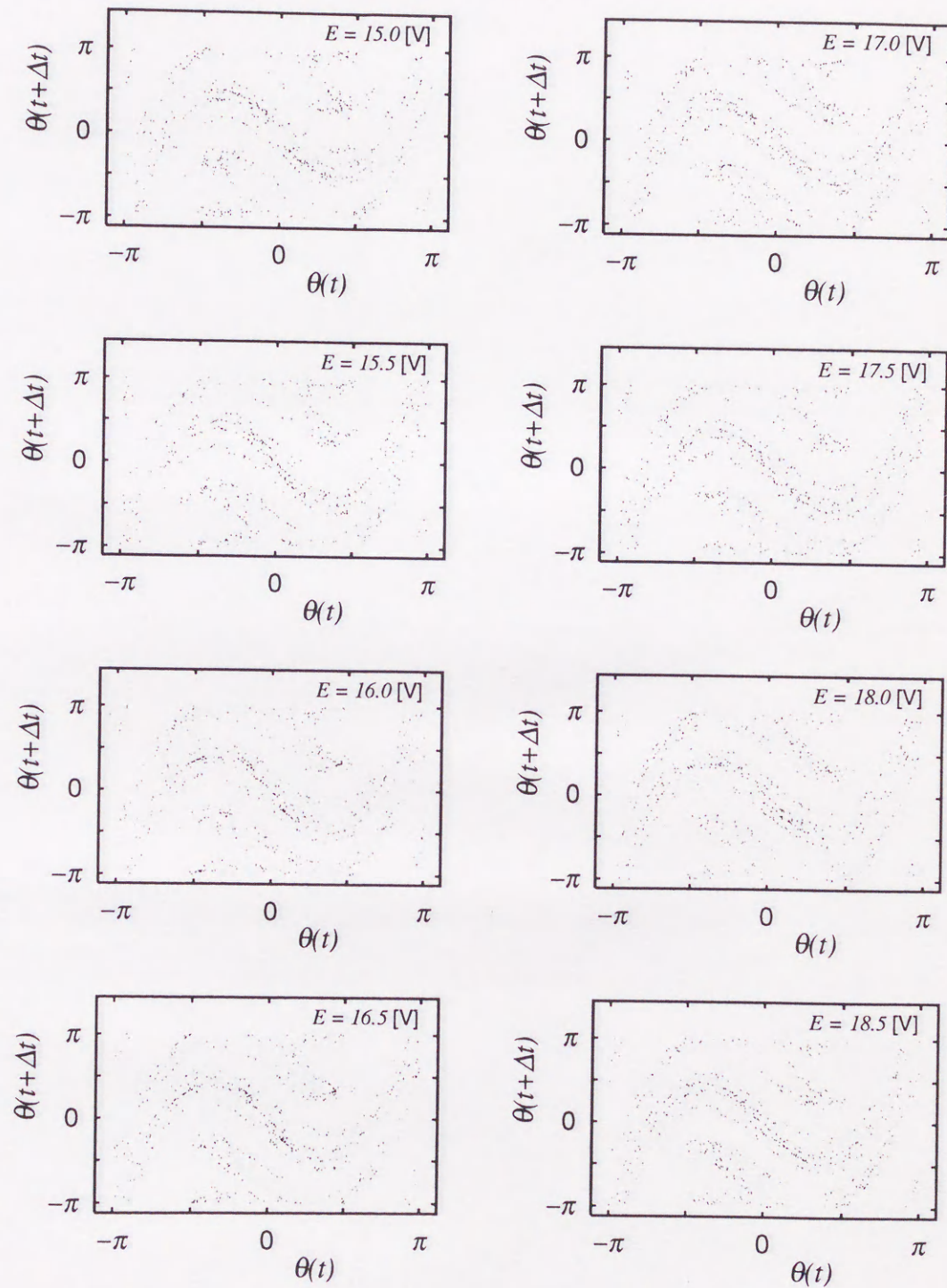
500 周期という短時間の計測結果であることを考慮して、大域的かつ定性的に、これらの結果を概観してみる。

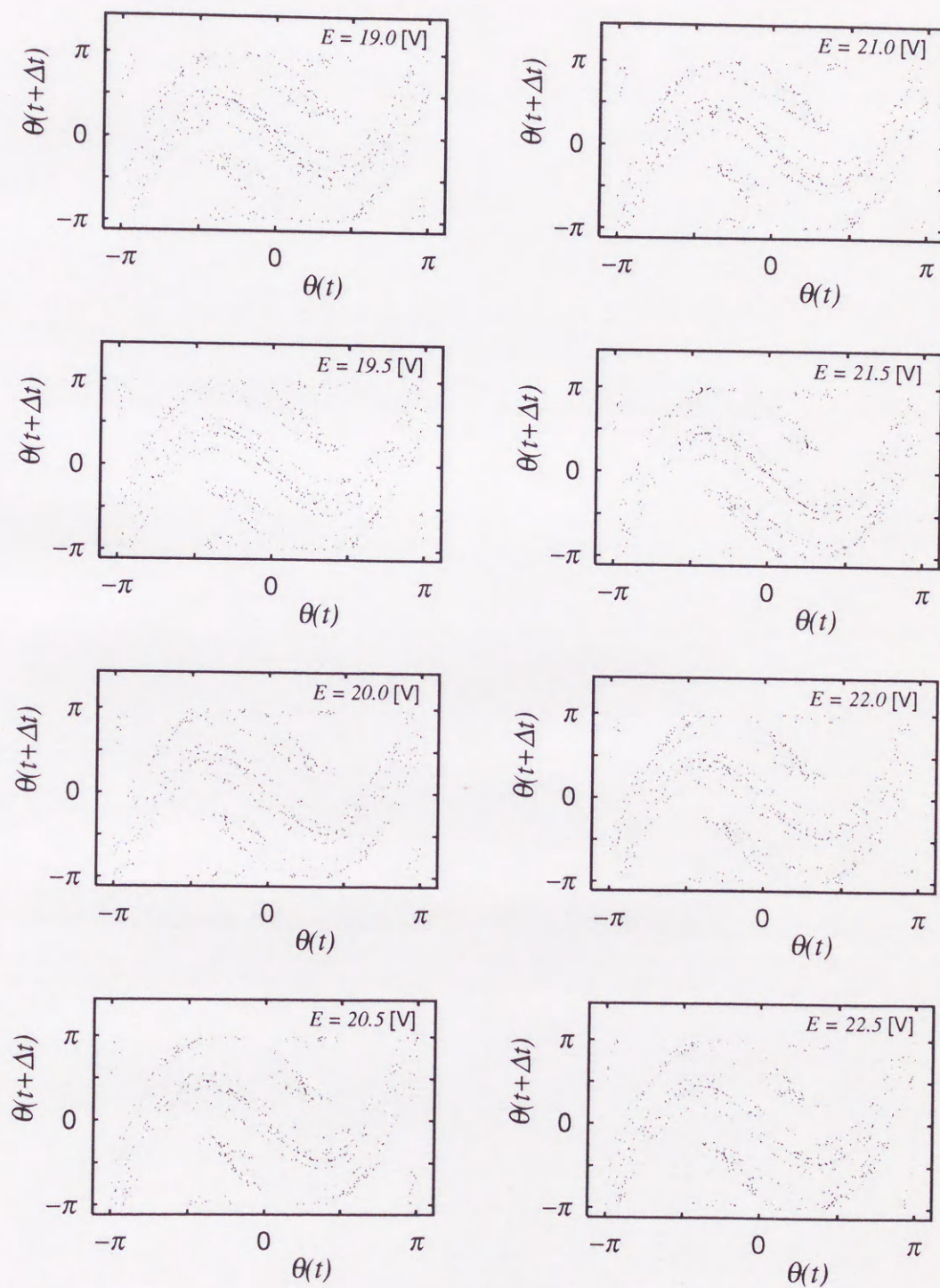
$E = 15.0$ [V] (図 5.6) におけるストレンジアトラクタは、混合性が強く、点の分布が特定の領域に拘束される傾向が弱い。このことは、装置の挙動に特定の周期性が見られないことを表わしており、この条件では、極めてランダム性の強い挙動が得られているのが分かる。このランダム性の強い挙動は、 E の増大と共に、次第に位相面上の存在領域に偏りを見せ始める (図 5.7)。 $E = 24.0$ [V] 付近 (図 5.8) に至ると、明らかに、ストレンジアトラクタの折畳み構造により生じた 1 次元的構造が見てとれるようになる。類似した性質は $E = 26.0$ [V] (図 5.8) まで保たれる。

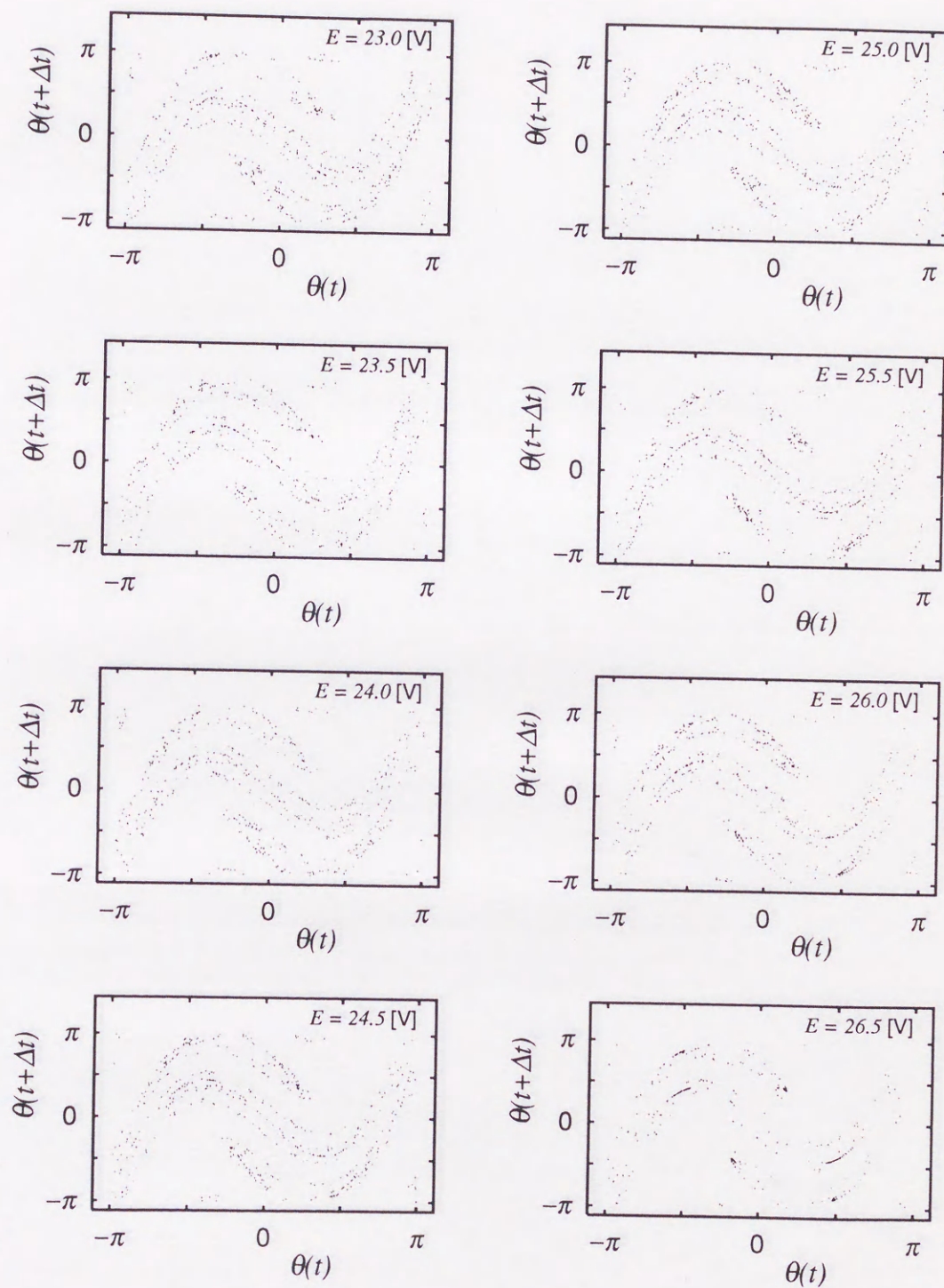
挙動の第一の大きな変化は、 $E = 26.5$ [V] (図 5.8) において見られる。それぞれが 3 周期性をもつ対称構造の間を不規則に遷移するバースト状態が表われ、 $E = 27.0$ [V] (図 5.9) において、周期的な挙動が支配的になるが、 $E = 27.5 \sim 29.5$ [V] (図 5.9) において再び $E = 24.0 \sim 26.0$ [V] (図 5.8) でみたような挙動が生じる。

挙動の第二の大きな変化は $E = 31.0$ [V] (図 5.10) 前後で生じる。2 周期的な線アトラクタが現われ、挙動がこの線アトラクタ上に留まる傾向が強くなっている。

さらに、この 2 周期的な線アトラクタは、 $E = 32.5$ [V] (図 5.10) 付近から存在領域を狭め始め、 $E = 37.0 \sim 45.0$ [V] (図 5.11, 図 5.12, 図 5.13) に至っては、ほぼ周期運動になるのが分かる。

図 5.6: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 15.0 \sim 18.5$ [V])

図 5.7: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 19.0 \sim 22.5$ [V])

図 5.8: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 23.0 \sim 26.5$ [V])

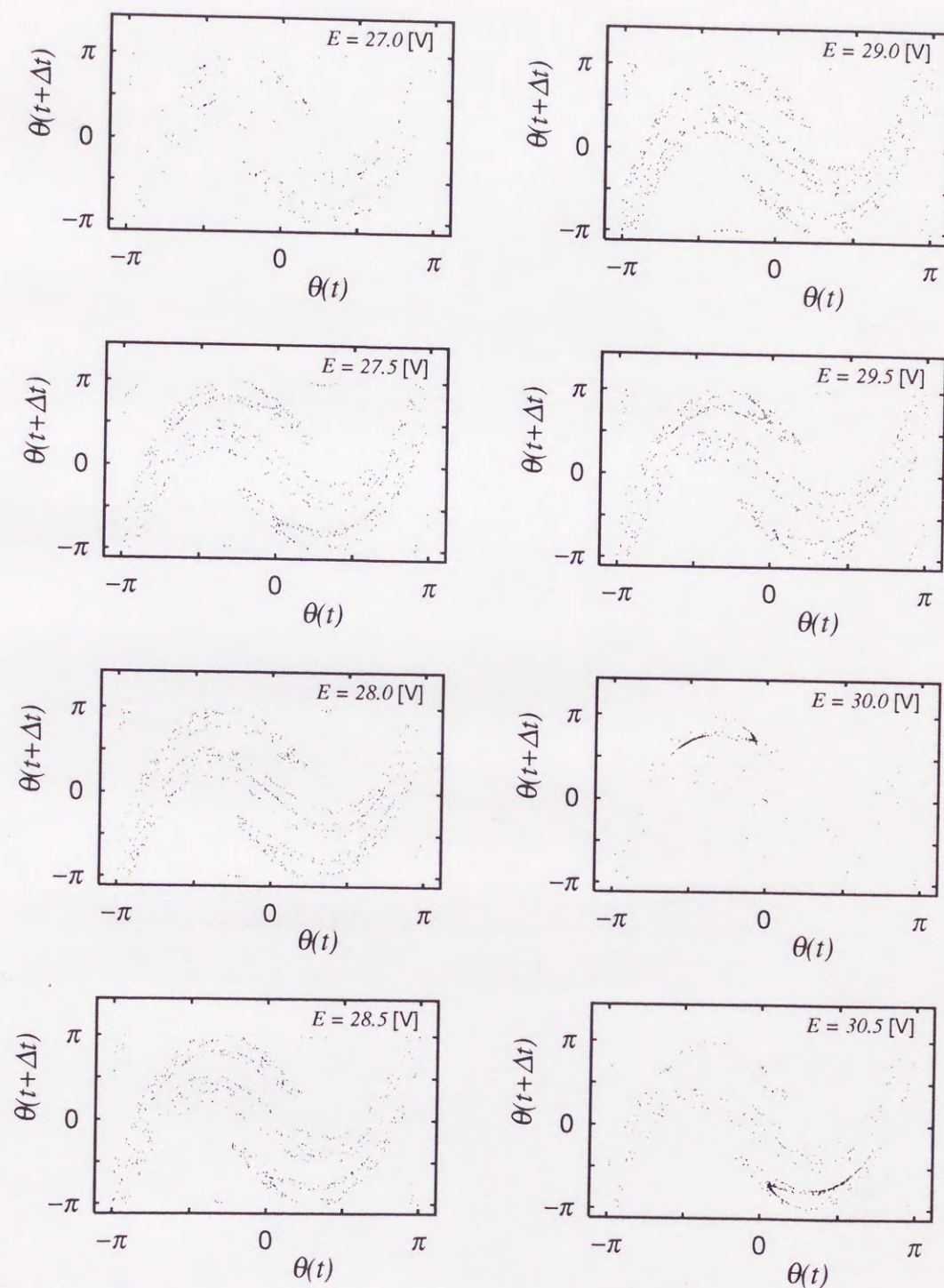


図 5.9: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 27.0 \sim 30.5$ [V])

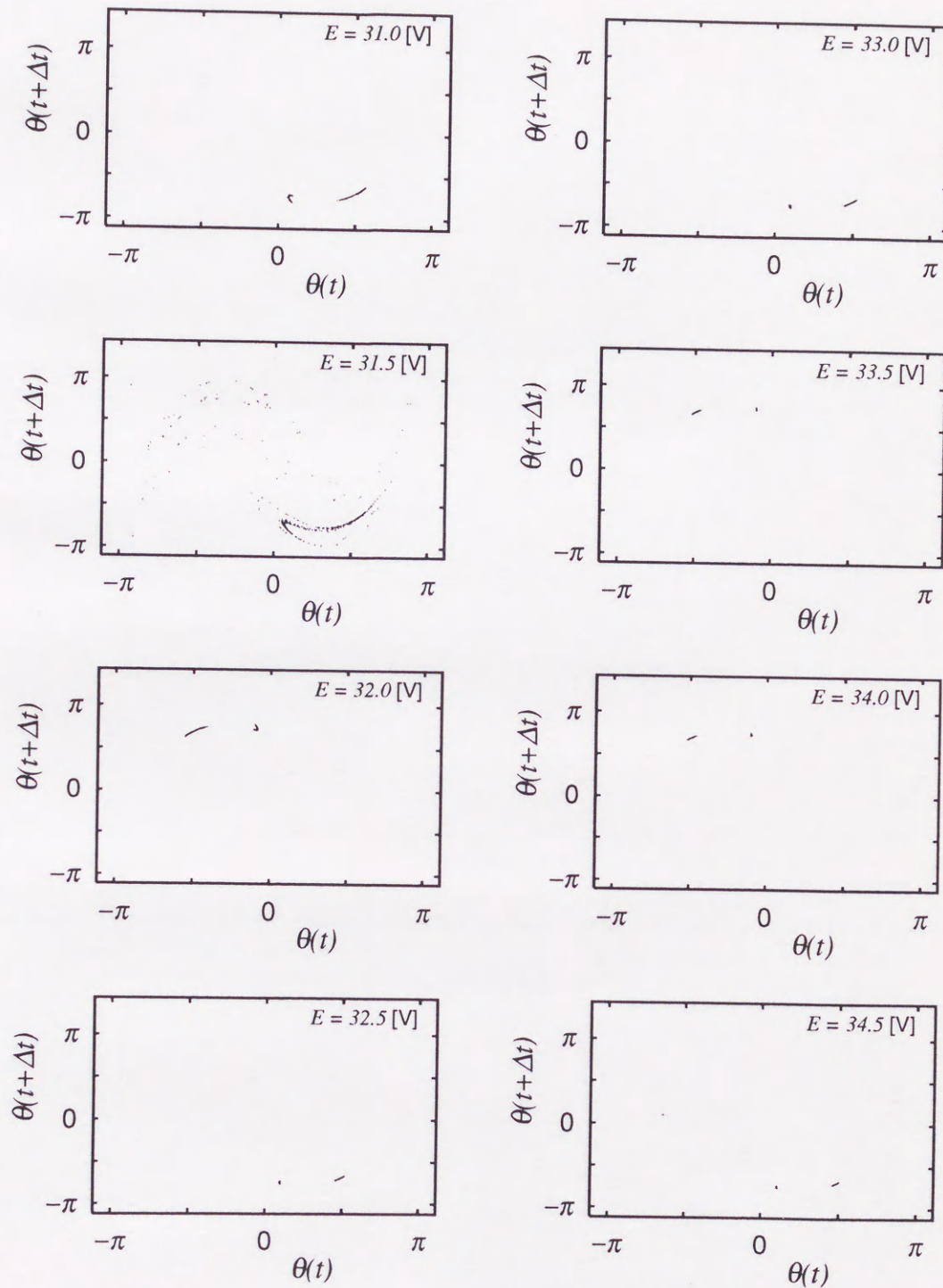
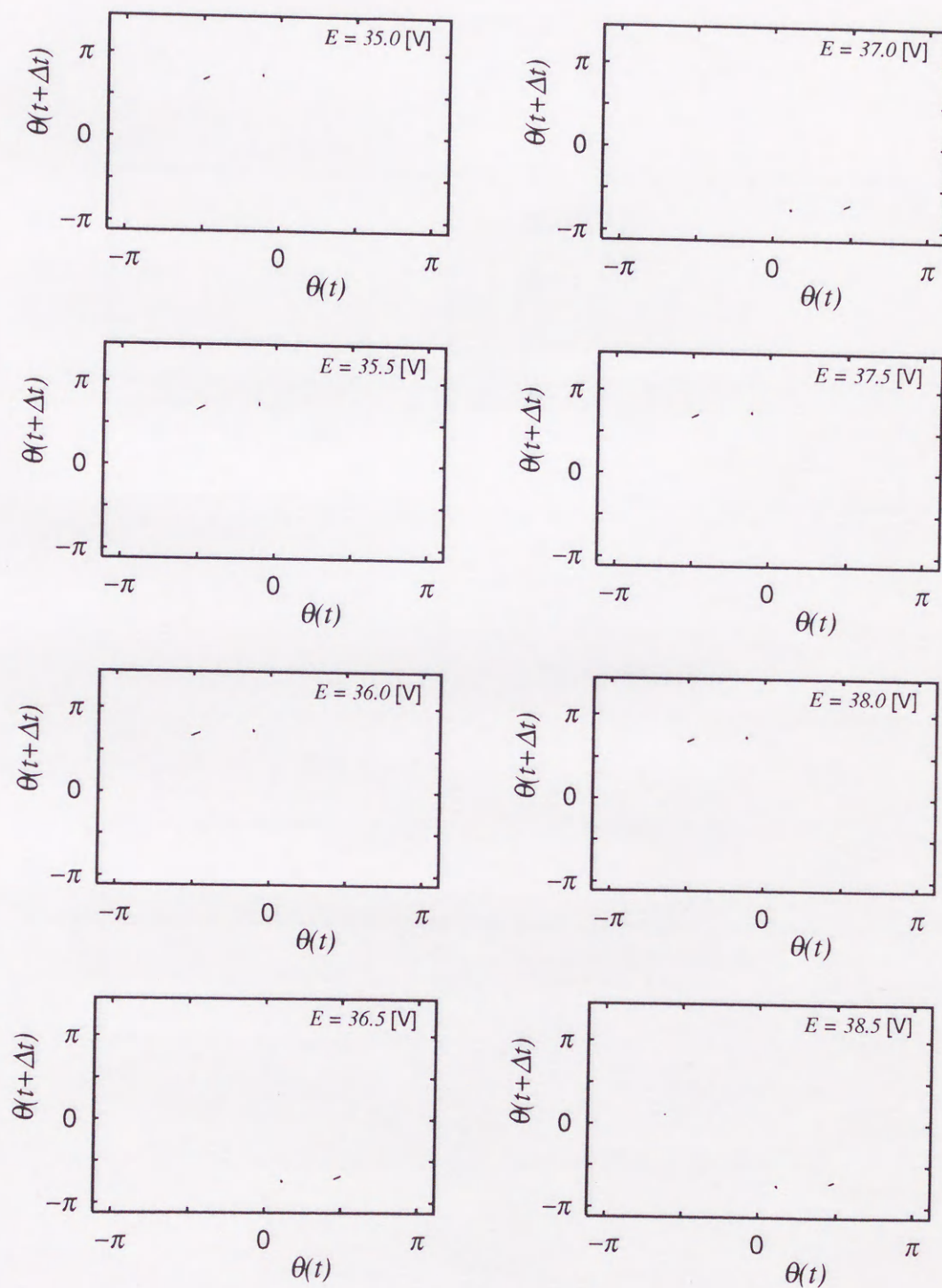
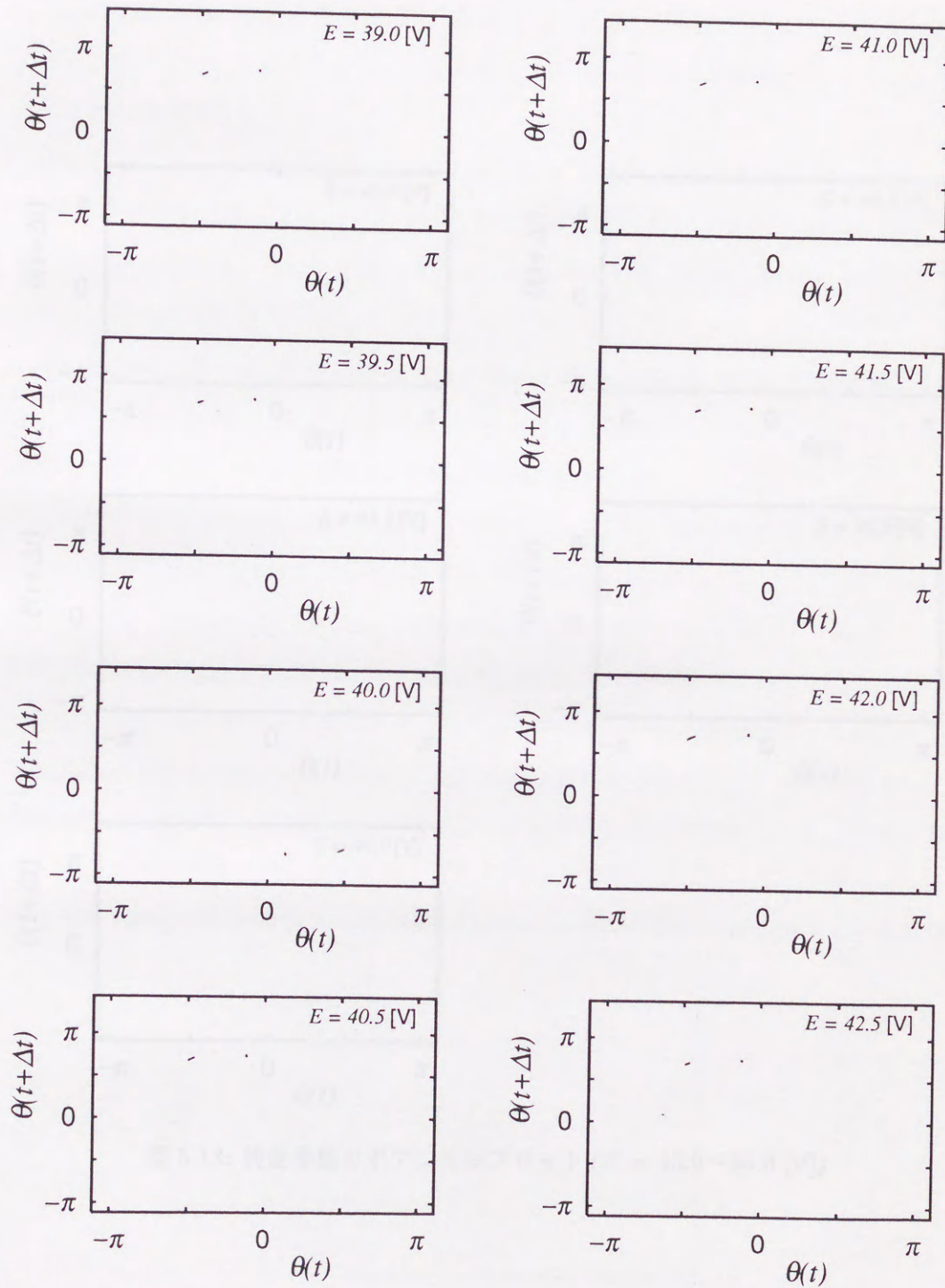


図 5.10: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 31.0 \sim 34.5$ [V])

図 5.11: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 35.0 \sim 38.5$ [V])

図 5.12: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 39.0 \sim 42.5$ [V])

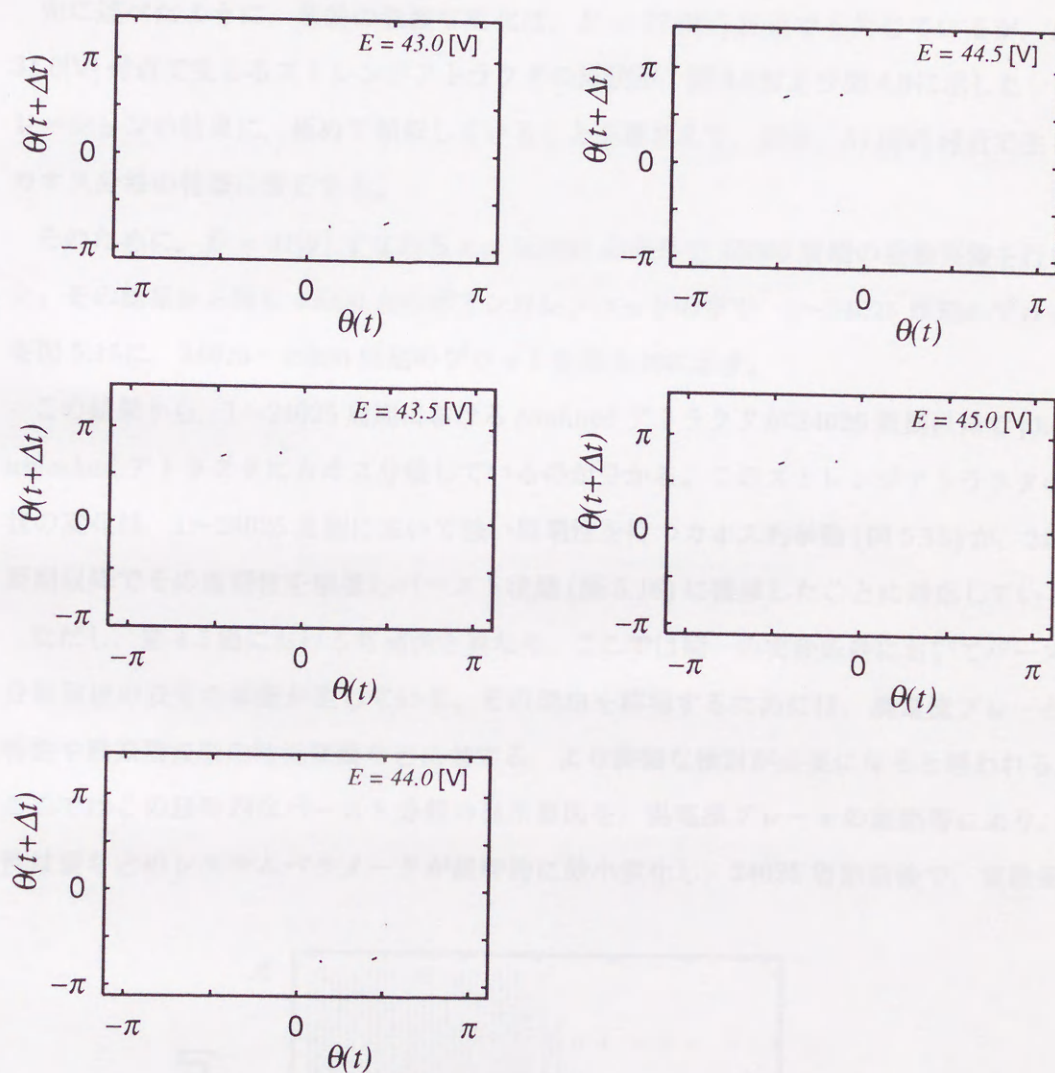


図 5.13: 装置挙動のポアンカレプロット ($E = 43.0 \sim 45.0$ [V])

図 5.6～図 5.13の結果をまとめた分岐図を図 5.14に示す。この分岐図は各ストレンジアトラクタの水平成分を、対応する E 上の縦のスライス上にプロットして得た。図 5.6～図 5.13 にみたポアンカレプロットの推移をより分かりやすく取り出しているのが分かる。この分岐図からも、装置の挙動が $E = 31.0$ [V] 付近で大きく変化していることが分かる。このときの式 (5.2) における無次元化減衰比 c を、図 5.5 から線形補間によって求めると、 $c = 0.2431$ となる。

先に述べたように、挙動の急激な変化は、 $E = 27.0$ [V] 付近でも生じているが、 $E = 31.0$ [V] 付近で生じるストレンジアトラクタの形状が、図 4.8 および図 4.9 に示したシミュレーションの結果に、極めて類似していることを踏まえて、以後、31.0 [V] 付近で生じるカオス分岐の特徴に着目する。

そのために、 $E = 31$ [V] すなわち $c = 0.2431$ の条件で 45000 周期の振動実験を行なった。その結果から得た 45000 点のポアンカレプロットの中で、1～24025 周期のプロットを図 5.15 に、24026～45000 周期のプロットを図 5.16 に示す。

この結果から、1～24025 周期における confined アトラクタが 24026 周期以降で phase-unlocked アトラクタにカオス分岐しているのが分かる。このストレンジアトラクタの形状の変化は、1～24025 周期において強い周期性を持つカオスの挙動 (図 5.15) が、24026 周期以降でその周期性を崩壊しバースト状態 (図 5.16) に推移したことに対応している。

ただし、第 4.5 節における数値例と異なり、ここでは同一の実験条件においてバースト分岐前後の双方の挙動が生じている。その理由を解明するためには、渦電流ブレーキの特性や励振周波数の時間変動などに対する、より詳細な検討が必要になると思われるが、ここではこの経時的なバースト分岐の発生要因を、渦電流ブレーキの加熱等により、粘性減衰などのシステムパラメータが経時的に微小変化し、24025 周期前後で、実験条件

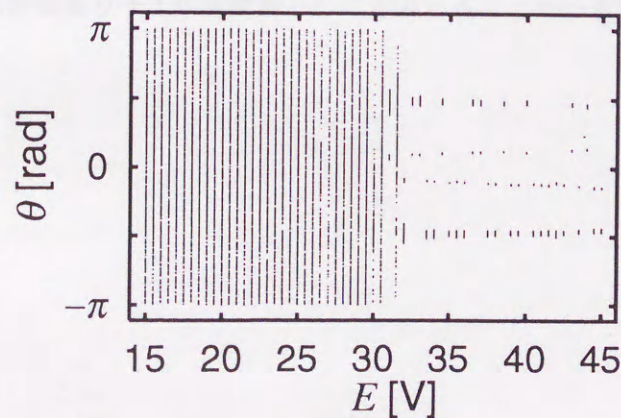


図 5.14: 装置挙動の分岐図 ($E = 15.0 \sim 45.0$ [V])

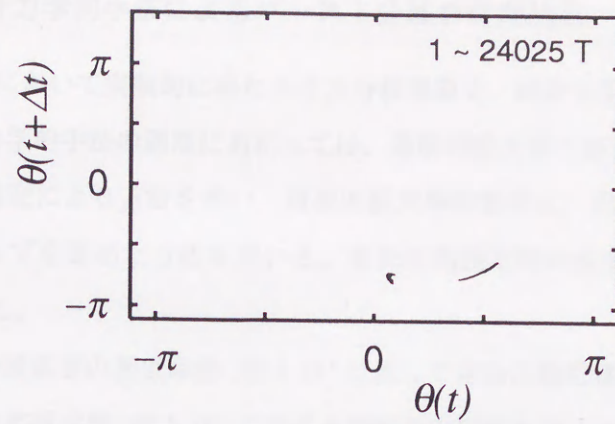


図 5.15: 装置挙動のストレンジアトラクタ (バースト分岐直前: 1~24025 周期)

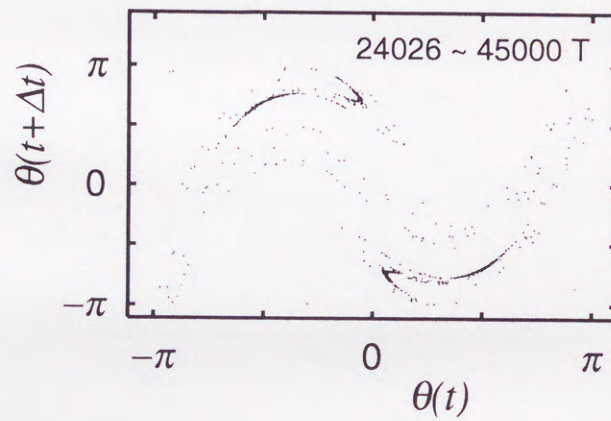


図 5.16: 装置挙動のストレンジアトラクタ (バースト分岐後: 24026~45000 周期)

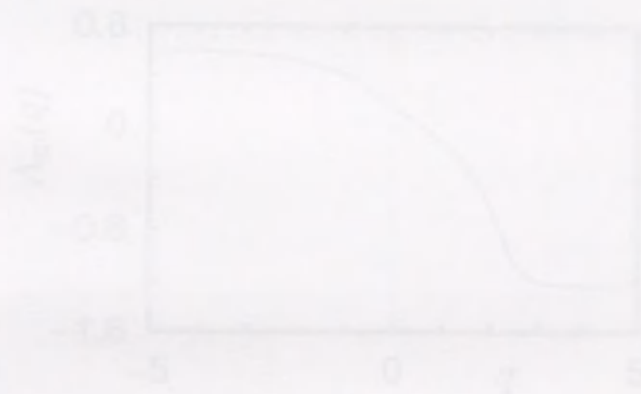
がバースト分岐の臨界点を越えたためであると見做す。

以上から、第 4.4.1 節のシミュレーション結果と同様なバースト分岐現象が、機械的に実現した係数励振振り子上の実挙動としても生じることを示す結果が得られた。

5.3.2 統計力学的手法によるバースト分岐の特徴抽出

第 5.3.1 節において実験的に得たカオス分岐現象を、統計力学的手法により特徴付けてみる。統計力学的手法の適用にあたっては、局所的拡大率の算出に、第 4.2.2 節で述べた推移行列の推定による方法を用い、粗視的拡大率の算出に、式 (4.17) に示した添字集合のオーバーラップを認めた方法を用いる。また行列推定時の検索打ち切りの上限 B_{\max} は 20 に設定した。

バースト分岐直前の装置挙動 (図 5.15) に対して求めた動的構造関数を図 5.17 に、バースト分岐後の装置挙動 (図 5.16) に対する動的構造関数を図 5.18 に示す。なお、小球の半径 r (第 4.2.3 節) のアトラクタの水平分布に対する百分率 r_p 、および粗視量 m (第 4.3.1 節) の値は図中に記した。



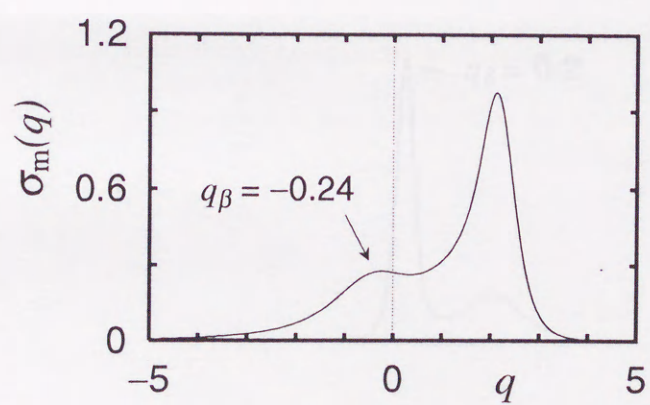
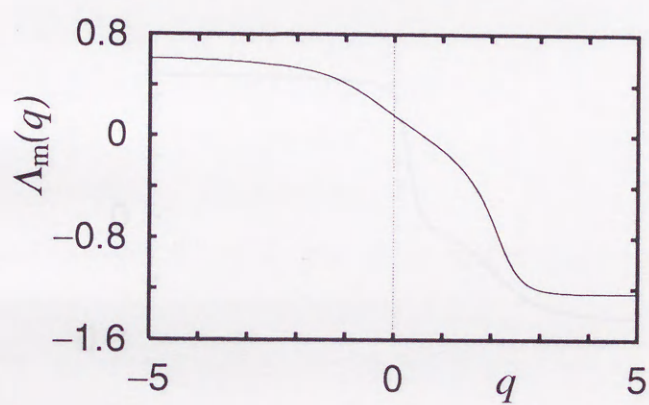
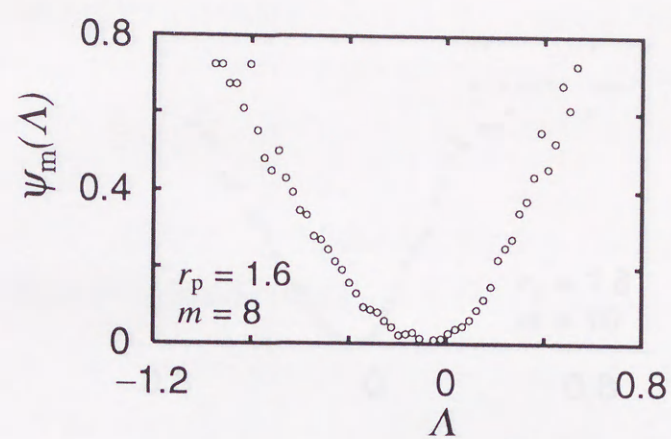


図 5.17: 装置挙動の動的構造関数 (バースト分岐直前: 1~24025 周期)

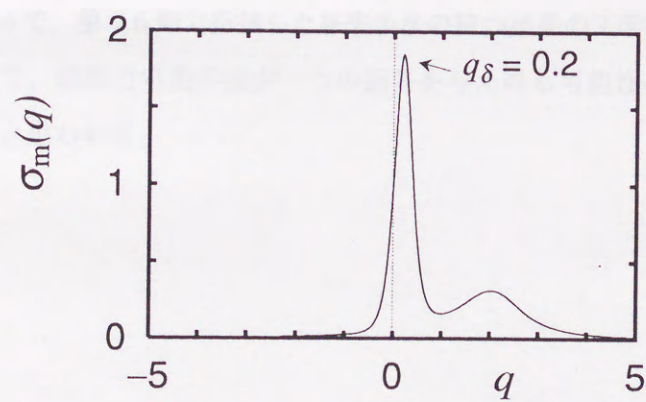
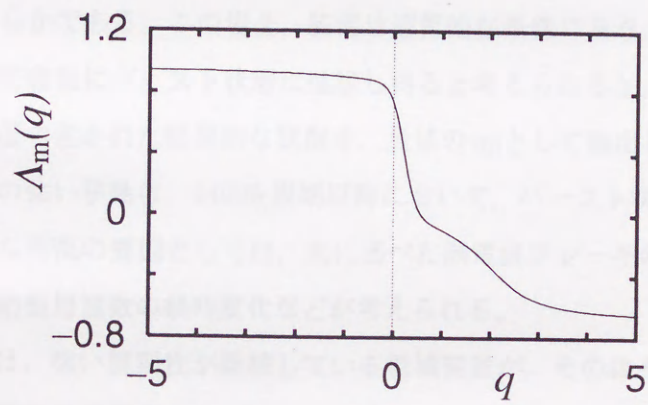
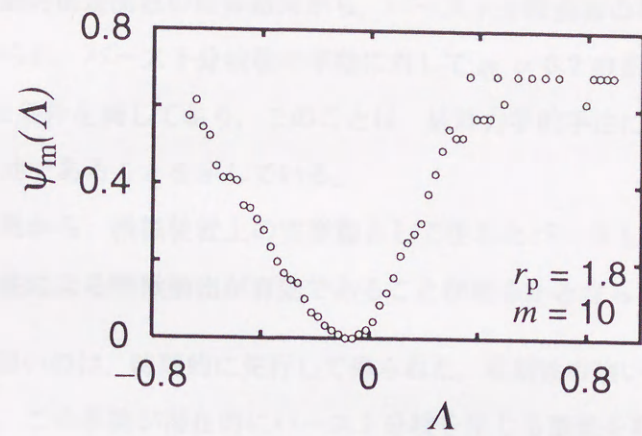


図 5.18: 装置挙動の動的構造関数 (バースト分岐後: 24026~45000 周期)

これらの動的構造関数の計算結果から、バースト分岐直前の挙動に対して $q_\beta = -0.24$ の負値が得られ、バースト分岐後の挙動に対して $q_\beta = 0.2$ の正値が得られた。これらの値は表 4.1 の条件を満たしており、このことは、統計力学的手法による特徴抽出が実挙動に対しても有効であることを示している。

以上の結果から、機械装置上の実挙動として生じたバースト分岐現象に対しても、統計力学的手法による特徴抽出が有効であることが明らかとなった。

特に興味深いのは、時間的に先行して得られた、周期性の強い挙動から得られた負値の q_β によって、この挙動が潜在的にバースト分岐を生じる徴候を取り出している点である。

すなわち、24025 周期付近までの装置の挙動 (図 5.15) は強い周期性を示しているが、負値の q_β から、この挙動に図 4.14 に示したようなバースト分岐直前の位相構造が含まれることは明らかである。この場合、装置は臨界的な条件にあり、装置の挙動は、微小な外乱によって容易にバースト状態に移行し得ると考えられるが、統計力学的手法は、このような装置の置かれた臨界的な状況を、負値の q_β として抽出しているといえる。実際この周期性の強い挙動は、24025 周期以降において、バースト状態 (図 5.16) に移行している。微小な外乱の要因としては、先に述べた渦電流ブレーキの加熱による粘性減衰の経時変化、励振周波数の経時変化などが考えられる。

この結果は、強い周期性が継続している機械装置が、その後その周期性を崩壊する可能性を、周期性の崩壊以前のデータから定量的に取り出したものと見做せる。この観点に立てば、本手法が抽出した q_β -相転移の工学的意味付けは明確であり、この場合 q_β -相転移は、装置の挙動の激変を事前に見積る定量的指標として機能したことになる。

これによって、第 2.6 節で指摘した従来手法の持つ結果の工学的意味付けの不明瞭さの解消に向けて、統計力学的手法が一つの回答を与え得る可能性を示す、一つの具体例を提示できたと思われる。

5.4 まとめ

第5章では、統計力学的手法の有効性を実験的に確認することを目的に、機械的に実現した係数励振振子を製作し、これ上に発生するカオスの挙動に対する考察を行い、以下の結果を得た。

- 機械装置のカオスの挙動にも、バースト分岐が生じる。
- 統計力学的手法による特徴抽出は、機械装置上のバースト分岐現象にも有効である。
- 統計力学的手法による特徴抽出の結果は、機械装置上のカオスの挙動の激変を、事前に見積るための定量的指標として機能した。

以上の結果から、データ解析的なカオスの挙動の特徴抽出において、従来手法が抱えていた解析結果の工学的意味合いの不明瞭さの問題を解消可能な方法論として、著者の提案した統計力学的手法が十分な妥当性を有していることを、実例をもって示した。

第6章

結 言

本論文では、第2章に概観した、カオスの定量的取り扱いの現状、および機械振動系におけるカオスの挙動の取り扱いの現状を踏まえて、カオスシステムのモデリング誤差の評価と、カオスの分岐現象の予測および特徴抽出に関する研究を行なった。

カオスシステムのモデリング誤差の評価問題に関しては、カオスの有する初期値鋭敏依存性から、カオスシステムとそのモデルとの差異を測る定量的指標が未だ存在していないという現状を踏まえ、このような困難を解消する新しい指標の構築を研究の課題とした。

まず、指標が持つべき性質を規定するために、カオスシステムとそのモデルとの差異を定量化する指標の必要性を生じる現実的な状況が、実挙動とシミュレーション結果との比較時に起こることに着目した。これに基づいて、指標の持つべき性質を、モデルがカオスの挙動の力学構造を完全に反映したときに、最小値をとるものと規定した。このために、カオスの同期現象を利用し、同期カオス規範を定義した。この指標はモデリング誤差が0のときに最小値をとる。これを用いて、モデルが含む、システムパラメータの誤差、非線形特性の誤差について評価を行なったところ、定義通り、誤差が0のとき規範がほぼ最小値を示すことが明らかになった。より現実的な状況として、2種類の誤差を同時に含むモデルを考え、これに対して同様の評価を行ない、この場合にも規範が単一の最小値を有することを確認した。以上の結果に基づいて、同期カオス規範が、著者の規定した新しい指標の所要条件を十分に満すものであるとの結論を得た。

一方で、カオスの分岐現象の予測および特徴抽出に関しては、機械振動系のような実在系における未知の現象の取り扱いにはデータ解析的な手法が適当であることと、従来のデータ解析的なカオスの解析手法に基づく結果に対しては、工学的意味付けを与えることが困難であるという現状を踏まえ、カオス分岐という明確に工学的解釈が可能であるような現象を取り上げ、この特徴付けに有効な、データ解析的手法の確立を研究の課題とした。

まず、van der Pol-Mathieu 系に発生するカオス分岐を取り上げ、リアプノフ指数を用いた場合に生じた困難が、動的構造関数の使用により解消される実例を示した。この基礎的な結果を踏まえて、動的構造関数上のピークのパターンに着目するという、動的構造関数の簡便な利用法を統計力学的手法として提案した。

統計力学的手法のより現実的な利用法を示すために、カオス分岐現象の中でも力学的意味付けの明確なバースト分岐現象に着目し、バースト分岐前後の挙動の特徴が、ピーク位置に関する簡単な不等式で表現可能であることを示した。ここまでの議論では、動的構造関数の算出に運動方程式を用いており、データ解析的な立場を目指す研究の主旨に反していたので、動的構造関数をカオスの挙動のデータ列から推定するという方法をとった。その結果、最終的にはカオスの挙動の1次元時系列さえ既知ならば、統計力学的手法が有効であることを数値例によって示した。これによって、データ解析的な立場から、工学的意味合いの明確なバースト分岐現象を特徴付けるための一応の定式化が得られたので、実挙動の計測時に不可避な装置ノイズの影響を検討したところ、ノイズの影響によって、バースト分岐直前の特徴抽出が無効になり得る結果が得られた。

以上の結果を踏まえ、統計力学的手法の実挙動に対する有効性を検証するための実験を行なった。機械的に実現した係数励振振り子系にもバースト分岐現象が存在することの実例を示し、これに対して統計力学的手法を適用したところ、その結果は、シミュレーション結果との良い一致を見た。

この結果において、従来手法と異なる点は、解析結果に対して工学的意味付けの明瞭な解釈が可能な点である。得られた結果は、機械装置の挙動の激変の徴候を、激変以前のデータから抽出しており、このことから、統計力学的手法の解析結果が、装置挙動の激変を事前に見積るための定量的指標として機能し得るとの主張を行なった。

以上の研究成果により、カオスシステムのモデリング誤差の評価、カオスの分岐現象の予測および特徴抽出の、双方の課題に関して、従来手法の有する困難を解消するための、具体的な方法が示せたと思われる。

特に、カオスの分岐現象の予測および特徴抽出に関しては、機械装置上の実挙動に関して、明らかに挙動の激変を予測した結果の取得に成功しており、ここで用いた方法論は、今後、機械装置上のカオスに限らず、実在系のカオスの挙動を取り扱う上での強力な指針となり得ると考える。

以上の結果を踏まえた今後の課題および展望について以下に述べる。

まずカオスシステムのモデリング誤差の評価問題に関して、本研究では、シミュレーションによる結果を提示するに留まったので、今後の大きな課題として、同期カオス規範の実挙動に対する有効性の検証がある。また、カオスの同期現象自体に関しても未だ未知な点が多く、特に非自律系における同期現象に関しては、より一層の検討を要すると考える。

また、カオスの分岐現象の予測および特徴抽出に関しては、まず理論的な興味として、周期外力に狭帯域ノイズが印加された系などの、システムノイズを内在する系の分岐現象の検討がある。この問題の解明に際しては、今回取得した実験データに対する確率論からの検討なども併せて行なう必要が生じると考える。

最後に、今回行なった実験では、分岐現象の再現とその特徴抽出に主眼を置いたため、装置とその力学モデルとの関係に関する詳細な検討は行なっていない。同期カオス規範の有効性の実験的検討を行なうためにも、より詳細な、装置と力学モデルとの対応づけが求められるが、これは今後の課題である。

以上の検討課題の多様性を見ても分かるように、現在のカオスに関する研究には、明確かつ静止した究極課題は存在していないように思われる。特に機械工学におけるカオスの研究は、およそ、その緒についたばかりであり、本論文における研究も僅かにその一角を占めるに過ぎない。

上述の検討課題の解決が、即、カオス機械工学なる分野の実現に繋がるとは言い難いが、本論文では、このようなカオス機械工学なる、未来の機械工学の登来を展望して、ここに結言とする。

参考文献

- (1) Edward Ott, Celso Grebogi and James A. Yorke: "Controlling Chaos", Physical Review Letters, Vol 64, No 11, 1990, pp.1196-1199
- (2) W. L. Ditto, S. N. Rauseo and M. L. Spano: "Experimental Control of Chaos", Physical Review Letters, Vol 65, No 26, 1990, pp.3211-3214
- (3) S. F. Masri and T. K. Caughey: "A Nonparametric Identification Technique for Nonlinear Dynamic Problems", ASME J. of Applied Mechanics, Vol 46, 1979, pp.433-447
- (4) S. F. Masri, H. Sassi and T. K. Caughey: "Nonparametric Identification of Nearly Arbitrary Nonlinear Systems", ASME J. of Applied Mechanics, Vol 49, 1982, pp.619-628
- (5) Massimiliano Giona: "Functional Reconstruction and Local Prediction of Chaotic Time Series": Physical Review, Vol 44, No 6, 1991, pp.3496-3502
- (6) 菅野直紀, 河合素直: サインニューラルネットワークを用いた非線形システムの同定と制御, 日本機械学会論文集, 第 60 巻 C 編, 569 号, 1994 年, 102 頁~106 頁
- (7) Y. Ueda: "Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation", J. of Statistical Physics, Vol 20, 1979, pp.181-196
- (8) 佐藤啓仁, 山本純雄, 勝沼歩, 南部壮寿: 非線形係数励振系のカオスの挙動, 日本機械学会論文集, 第 57 巻 C 編, 537 号, 1991 年, 1425 頁~1430 頁
- (9) 佐藤啓仁, 山本純雄, 川上正, 勝沼歩, 南部壮寿: 周期外力を受ける非線形振動系の異常現象 (跳躍現象とカオスの挙動), 日本機械学会論文集, 第 57 巻 C 編, 541 号, 1991 年, 2819 頁~2825 頁
- (10) 佐藤啓仁, 山本純雄, 勝沼歩, 南部壮寿, 吉田勝俊: 強制外力を受ける係数励振形非線形振動系のカオスの挙動, 日本機械学会論文集, 第 58 巻 C 編, 551 号, 1992 年, 2024 頁~2031 頁
- (11) 佐藤啓仁, 山本純雄, 勝沼歩, 光野勝也: 歯車系の動的異常現象について (軸の影響を考慮する場合), 日本機械学会論文集, 第 57 巻 C 編, 538 号, 1991 年, 2108 頁~2113 頁

- (12) 佐藤啓仁, 山本純雄, 三田和弘, 高津宣夫, 大森崇言: 歯車系の動的異常現象について (カオスの挙動と特徴抽出), 日本機械学会論文集, 第 57 卷 C 編, 538 号, 1991 年, 2108 頁~2113 頁
- (13) 谷藤克也, 永井健一: 鉄道車輪軸の転走におけるカオス状振動 (支持弾性の低下にともなう蛇行運動の変動), 日本機械学会論文集, 第 59 卷 C 編, 562 号, 1993 年, 1633 頁~1637 頁
- (14) M. Sano and Y. Sawada: "Measurement fo the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series", Physical Review Retters, Vol 55, No 10, 1985, pp.1082-1085
- (15) Shinichi Sato, Masaki Sano, and Yasuji Sawada: "Practical Methods of Measuring the Generalized Dimension and the Largest Lyapunov Exponent in High Dimensional Chaotic Systems", Physical Review Retters, Vol 55, No 10, 1985, pp.1082-1085
- (16) Stephen Wiggins: "On the Detection and Dynamical Consequences of Orbits Homoclinic to Hyperbolic Periodic Orbits and Normally Hyperbolic Invariant Tori in a Class of Ordinary Differential Equations", SIAM J. of Applied Mathematics, Vol 48, No 2, 1988, pp.262-285
- (17) Floris Takens: "Detecting Strange Attractors in turbulence", Lecture Note in Mahtematics, No 898, 1981, pp.366-381
- (18) 佐藤啓仁, 山本純雄, 吉田勝俊, 沖村達男, 石井弘和: 非線形振動系におけるカオスの挙動の特徴について (統計力学的手法による一考察), 日本機械学会論文集, 第 58 卷 C 編, 552 号, 1992 年, 2357 頁~2362 頁
- (19) 佐藤啓仁, 山本純雄, 吉田勝俊, 沖村達男: 非線形振動系におけるカオスの挙動の特徴について (運動方程式が未知なる場合), 日本機械学会論文集, 第 59 卷 C 編, 567 号, 1993 年, 3299 頁~3306 頁
- (20) 吉田勝俊, 佐藤啓仁, 山本純雄, 横田和隆: 非線形振動系におけるカオスの挙動の特徴について (実験的考察), 日本機械学会論文集, 投稿中
- (21) 長島知正, 永井善則, 荻原利彦, 土屋尚: 時系列データ解析とカオス, 計測と制御, Vol. 29, No. 9, 1990 年, 839 頁~846 頁
- (22) 長崎弘幸, 馬場良和: カオス入門, 培風館, 1992 年, 93 頁~118 頁
- (23) Hiroki Hara, Takehiko Horita, Hajime Mori, Terumitsu Morita and Koji Tomita: "Characterization of Local Structures of Chaotic Attractors in Terms of Coarse-

- Grained Local Expansion Rates”, Progress of Theoretical Physics, Vol 80, No 5, 1988, pp.809-825
- (24) Koji Tomita, Hiroki Hara, Takehiko Horita, Hajime Mori and Terumitsu Morita: “Classification of Collisions of Chaotic Attractors with Unstable Periodic Orbits in Terms of the q -Phase transition”, Progress of Theoretical Physics, Vol 81, No 1, 1989, pp.1-6
- (25) Koji Tomita, Hiroki Hara, Takehiko Horita, Hajime Mori, Terumitsu Morita, Hisao Osamoto and Hirotaka Tominaga: “ q -Phase Transition in Chaotic Attractors of Differential Equations at Bifurcation Points”, Progress of Theoretical Physics, Vol 81, No 6, 1989, pp.1124-1134
- (26) Luis M. Pecola and Thomas L. Carrol: “Synchronization in Chaotic Systems”, Physical Review Letters, Vol 64, No 8, 1990, pp.821-824
- (27) Luis M. Pecola and Thomas L. Carrol: “Synchronizing Chaotic Circuits”, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol 38, No 4, 1991, pp.452-456
- (28) 吉田勝俊, 佐藤啓仁, 山本純雄, 横田和隆: 同期カオスを用いた非線形システムの同定 (同期カオス規範の提案), 日本機械学会論文集, 第 60 巻 C 編, 578 号, 1994 年, 3268 頁~3273 頁
- (29) 早乙女辰男: 振動切削による加工精度の向上に関する研究, 宇都宮大学博士論文, 1995 年
- (30) I. Grabec: “Explanation of Random Vibrations in Cutting on Grounds of Deterministic Chaos”, Robotics & Computer-Integrated Manufacturing, Vol 4, No 1/2, 1988, pp.129-134
- (31) F. C. Moon: “Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors”, ASME J. of Applied Mechanics, Vol 47, 1980, pp.638-644
- (32) H. Hatwal, A. K. Mallik and A. Ghosh: “forced Nonlinear Oscillations of an Autoparametric System— Part2: Chaotic Responses”, ASME J. of Applied Mechanics, Vol 50, 1983, pp.663-668
- (33) 永井健一: 周期励振をうける圧縮座屈後のはりのカオス振動に関する実験, 日本機械学会論文集, 第 56 巻 C 編, 525 号, 1990 年, 1171 頁~1177 頁
- (34) 永井健一, 山口誉夫, 谷藤克也, 楊 平: ケーブルで拘束を受ける片持ばりのカオス振動の実験, 日本機械学会論文集, 第 56 巻 C 編, 525 号, 1990 年, 1171 頁~1177 頁

- (35) R. W. Leven, R. Pompe, C. Wilke and B. P. Kock: "Experiments on Periodic and Chaotic Motions of a Parametrically Forced Pendulum", *Physica* 16D, 1985, pp.371-384
- (36) William van de Water, Marc Hoppenbrouwers and Freddy Christiansen: "Unstable Periodic Orbits in the Parametrically Excited Pendulum", *Physical Review*, Vol 44, No 10, 1991, pp.6388-6398

謝 辞

本論文は、私が学部4年で宇都宮大学機械システム工学科佐藤啓仁研究室に配属以来行ってきた、6年間の研究をまとめたものです。この6年間にわたり、佐藤啓仁教授には、主任指導教官として御指導頂きました。科学に深く、工学に広い、教授の御指導の一言一言が、私の研究生生活の最大の原動力であったことは、疑う余地もありません。研究において望む結果が得られず意気消沈していても、教授の深遠なる未来への展望を伺っているうちに、耐えがたいほどの研究への熱望が生じ、教授室を出るやいなや研究に没頭し始める自分を不思議に思ったことが幾度となくありました。このような教授の研究者としての圧倒的なパワーは、常に私の憧れの的でありました。私が研究を職業とすべく決意できたのも、佐藤啓仁教授の御指導を受ける機会に恵まれたためであり、この幸運に感謝の念を禁じ得ません。ここに深甚の謝意を表します。

また、本研究の遂行にあたって、宮道壽一教授、畑沢鉄三助教授には、他分野の御専門の立場から貴重かつ有益な御指導を頂きました。毎週貴重な御時間をさいっていただいていた御指導は、とかく自分の専門分野に閉じこもりがちな研究生生活において、新鮮そのものであり、自らの視野の狭さを痛感するよい機会となりました。ここに深く御礼申し上げます。

本論文の執筆にあたっては、山本純雄教授、鏡重次郎教授、進村武男教授、宮道壽一教授に、親身の御指導を頂きました。論文執筆における論理展開の甘さや帰結の妥当性の在り方などに対する詳細な御助言のみならず、御自分の専門分野との関連の可能性などの、今後の研究の発展に継がる貴重なコメントまで頂きました。ここに深く謝意を表します。

実験装置の製作にあたって、早乙女辰男氏((株)パイロット)には、多大な御協力を頂きました。御自身の学位論文の執筆で御多忙の中、機械設計に関わる技術相談や装置図面の検図など、快くお引き受け頂きました。その上、製作会社の選定や製作依頼に至っては、様々な便宜をはかって頂きました。私にとって、機械装置の設計・製作は初めての体験であり、同氏の的確な御助言なしには、本研究における実験的立場は成立し得なかったと思います。ここに厚く御礼申し上げます。

同室の横田和隆助教授には、英作文の指導から、電算機処理の技術指導に至るまで、日常のあらゆる面でお世話になりました。特に、助教授による電算機処理に関する、的確

かつ迅速な御助言には何度も救われました。本研究では、装置の計測制御、数値シミュレーション、データ解析などの研究に直接関わる処理から、論文執筆、論文原稿の印刷に至るまで、電算機を使用しましたが、そこで発生する種々の技術的問題は、私の力だけでは、いずれも暗礁に乗り上げようなものばかりだったと思います。助教授の誠心誠意の御指導には、心から感謝しております。厚く御礼申し上げます。

言うまでもなく、本論文に掲載した研究成果は、同室の学生諸氏との共同作業によって産み出されました。私が研究室に配属された当初、先輩の大学院生として、非線形力学の初歩を御指導下さった勝沼歩氏(現・(株)東芝)、南部壮寿氏(現・松下電気産業)、C言語の初歩を御指導頂いた内藤富雄氏(現・大同特殊鋼)に深く感謝します。本研究の一つの主題である時系列からの統計力学的手法の発想は、沖村達男氏(現・本田技研(株))、石井弘和氏(現・TDK)との活発な議論の中で生まれました。また、膨大なシミュレーションのデータの作成は、福田徹氏(現・日本信号)を始めとして、現大学院生の軽部周、大芦佳宏、石村徹、内藤朗、水谷敬諸氏の努力によるものです。ここに深く敬意を表します。また、その他同室の学生諸氏には、文献の複写等の雑多な作業の多くを快く代行して頂き、その上、多くの励ましの声まで頂きました。本当にありがとうございました。

最後になりましたが、齊藤秀次郎技官には、郵便物の発送や機器の購入手続き等、研究に不可欠な種々の手続きの遂行において、大変お世話になりました。ここに厚くお礼申し上げます。

